



TITLE:

横磁場ランダムエネルギーモデル の解析: 可解量子スピングラスモデル

AUTHOR(S):

小渕, 智之

CITATION:

小渕, 智之. 横磁場ランダムエネルギーモデルの解析: 可解量子スピングラスモデル. 物性研究 2007, 88(6): 845-880

ISSUE DATE:

2007-09-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110877>

RIGHT:

修士論文 (2006年度)

横磁場ランダムエネルギーモデルの解析 –可解量子スピングラスモデル–*

東京工業大学 大学院理工学研究科 小淵 智之†

目 次

1 序論	846
1.1 スピングラス理論について	846
1.2 量子スピングラス	848
2 レプリカ法とランダムエネルギーモデルのレビュー	850
2.1 レプリカ法	850
2.2 ランダムエネルギーモデルへのレプリカ法によるアプローチ	851
2.3 ミクロカノニカルの方法	858
3 横磁場中のランダムエネルギーモデルの解析	859
3.1 トロッター分解	860
3.2 レプリカ解析	861
3.3 レプリカ対称解	863
3.4 RSB 解と相図	865
4 静的近似の妥当性の検証	867
4.1 Large- p 展開	867
4.2 時間依存 large- p 展開	871
5 総括	877
A 相関関数の計算	877
B $T \rightarrow 0$ 極限における自由エネルギーの温度微係数について	878

*本稿は、東京工業大学に2007年2月に提出した修士論文「Analysis of the Random Energy Model in a Transverse field - Solvable Quantum Spin Glass -」の和訳原稿である。

†E-mail: obuchi@stat.phys.titech.ac.jp

1 序論

1.1 スピングラス理論について

磁性、ひいてはスピン系に関する研究は、現在も統計力学の主要な題材の一つである。特に、Onsager が 2 次元正方格子上的強磁性イジングモデルの厳密解を導いて以来 [1]、イジングスピン系は相転移と臨界現象の標準模形として精力的に研究されてきた。フラストレーション、格子形および次元、外場といったものに依拠して、この系は様々な振る舞いを見せたのである。

統計力学の中でも最も重要で面白い話題の一つは、相転移と臨界現象に関するものである。1960 年代から 70 年代にかけて、繰り込み群の方法とスケーリング理論が開発され、臨界現象の本質が、空間的に一様な系に対しては、ある意味で包括的に明らかとなっていく。このときから、統計力学はその適用範囲を広げ、より多彩な対象を扱えるよう拡張されていくこととなった。非一様性やランダムネスを持った系の取り扱いはそのような方向の一つであり、スピングラス理論はそのような試みの中で最も成功した例の一つである。

スピングラス理論のそもそもの目的は、ある種の磁性合金の奇妙な振る舞いを説明することであった。この種の合金に関するもっとも初期の実験の一つは希釈 Au-Fe 合金に関するもので、Cannella と Mydosh によってその性質が調べられた [2]。その特徴的な性質は、強い履歴現象（ここでは、サンプルの性質が加熱、冷却の順序に著しく依存していることを意味する）と転移点 T_c における交流磁化率の異常なカスプ（鋭り）である。これらの性質は、系に無数の準安定な状態があり、そのうちの一部に系がトラップされてしまうために起こると考えられている。実際、このような合金系の相互作用が以前から調べられていて [3, 4]、それによれば以下の式

$$J_{ij} \propto \frac{1}{r_{ij}^3} \cos(2k_F r_{ij}) \quad (1.1)$$

によって表現されることが分かっている。これを RKKY 相互作用と呼ぶ。 r_{ij} は 2 スピン間の距離、 k_F はフェルミ波数である。RKKY 相互作用は、その原子（スピン）の位置に応じて、正負両方の値を相互作用にランダムに導入するため、系に無秩序なフラストレーションが生じ、そのためにたくさんの準安定状態が生まれると考えられている。

Edwards と Anderson はこのような合金を取り扱うのに、EA モデルと呼ばれるあるモデルを導入した [5]。このモデルでは、相互作用は最近接のものに限り、各相互作用をボンドごとに独立な分布から生成される確率変数として扱うのである。ハミルトニアンは

$$H = - \sum_{\text{n.n.}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.2)$$

と表され、 σ はイジング変数、 J_{ij} はスピン間の相互作用であり確率変数である。このモデルを厳密に解くのは非常に難しいため、Edwards と Anderson は、このモデルの解析に平均場近似を用いた。一般に平均場は空間次元が上がると正しい解に近づくことが知られていて、実際、一様な相互作用を持つ強磁性イジングモデルでは厳密になる。そこで、EA モデルをより詳細に解析するために、Sherrington と Kirkpatrick は SK モデルと呼ばれる、EA モデルの無限レンジ版を導入した [6]。SK ハミルトニアンは以下の式

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.3)$$

で与えられる．ここで和の変数は全てのスピン対について取るものとする．SK モデルの場合、全てのスピンが全結合しているという対称性から、ある秩序変数が自然と導入される．この変数はスピングラス秩序変数と呼ばれ

$$q = [\langle \sigma_i \rangle^2] \quad (1.4)$$

という式で表現される．ここで $[\dots]$ は相互作用 J_{ij} の分布に関する平均で、 $\langle \dots \rangle$ は通常の統計力学の意味の平均（熱平均と呼ぶ）を表す．なぜ相互作用に関する平均がつくかという、一般に大自由度系で観測に掛かるのは、物理量の平均値のみであり、ゆえに十分大きい系を考えるのであれば熱力学量の計算はその平均値を計算するだけでよいのである．この性質を自己平均性 (self-averaging property) と呼ぶ．

ここで上で導入した変数 q の物理的意味を考える．高温の常磁性相においては、スピンは特定の向きを向くことはない、磁化 m も q も 0 である．また、強磁性相では空間的に一様な秩序を持ち、ある特定の方向をスピンが向きやすくなっているため、ほとんどのサイトで $\langle \sigma_i \rangle > 0$ である．このことは $m = [\langle \sigma_i \rangle] > 0, q > 0$ を意味している．一方、もしスピングラス相があれば、その特徴であるスピンがランダムな向きで凍結しているという性質を反映したものであろう．これは局所磁化 $m_i = \langle \sigma_i \rangle$ は 0 でない値を持つが、その向きはサイトによってばらばらであり、結果として大域的な磁化が $m = [\langle \sigma_i \rangle] = 0$ となることを意味する．ところが、同じ状況で、パラメーター q は、正の量 $\langle \sigma_i \rangle^2$ の平均であるために 0 ではない．故にスピングラス相は $m = 0, q > 0$ というふうに特徴付けられ、同時に q がスピングラス秩序変数として解釈できることが分かる．

この SK モデルの解析は大きな成功を収め、有限温度 T_c でスピングラス相への 2 次相転移が起こることが示されると同時に、磁化率のカスプといったスピングラスの特徴的な性質が定性的に再現された [7]．また、予期されていなかったスピングラス相の興味深い性質が、SK モデルの解析から明らかとなった．それは、異なる q の値を与える多くの純粋状態が共存するというものであった．2 章で詳しく説明するが、スピングラスの振る舞いを正しく見るにはこれら純粋状態からの全ての寄与をきちんと評価しなければならないのである．それぞれの純粋状態は自由エネルギーの値としては同じ値を持ち、熱力学極限ではお互いが無限に高いエネルギー障壁によって区切られている．しかもこれらの状態の数はシステムサイズ N と共に増大し、やがては相空間で連続的に分布するようになるのである（図 1 参照）．これらの純粋状態の面白い性質として、それらが階

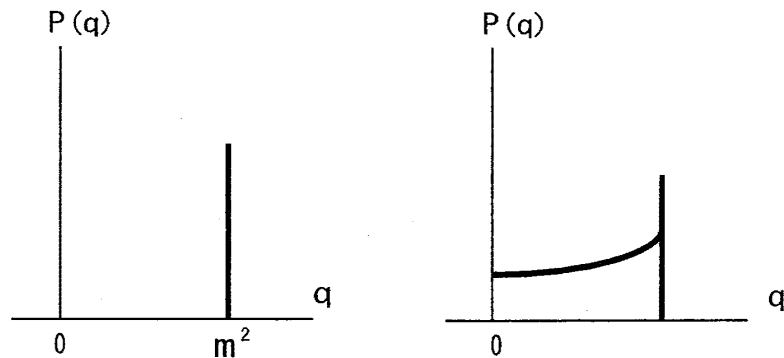


図 1: スピングラス秩序変数 q の分布関数 $P(q)$ ．左が通常の系、右が SK モデル．

層構造 (hierarchical structure) を成すということが知られている [8, 9]．ここでいう階層構造とは 3 つの純粋状態を選んだとき、その状態間の距離（確率分布の重なりで定義される．詳しくは

[8, 9] を参照) が、相空間上で、常に二等辺三角形か正三角形を成すことを意味する。この性質を超計量性 (ultrametricity) と呼び、現実のスピングラスの性質にもこの構造が影響を及ぼしていると思われる。どういうことかという、相空間の無数の安定状態の存在は、エルゴード性の破れ (履歴現象) と結びついているが、この安定状態の数が、温度が低くなるにつれ階層的に (一つの安定状態がいくつかの安定状態に枝分かれして) 増えていくと考えられているのである。実際いくつかの実験がこの描像を支持している [10]。もちろん、以上の結果は平均場理論である SK モデルの解析によって得られたものであり、それが現実の 3 次元のスピングラスを記述しているという保障は無い。しかし、その物理的描像は通常のランダム系にも自然に適用でき、またそれを否定するような実験結果もないので、これら平均場モデルの結果は、スピングラス理論の最も重要な結果として認識されている。

無限レンジモデルの成功の一方で、有限次元のスピングラスに関する直接の知見というのは未だに多くない。有限次元における解析的アプローチはかなり難しく、多くの研究では数値計算に頼るのが通常となっている。EA モデルに関する最も興味ある話題の一つは、上述した SK モデルの描像 (すなわち超計量性や $P(q)$ の構造など) が成り立っているかどうかというものである。この描像は一般にモンテカルロシミュレーションなどによって確かめることができるが、スピングラスではしばしばこれらの数値計算もうまくいかないことがある。高温の平衡状態に対応するランダムなスピン配位からシミュレーションを始めた場合、フラストレーションによって発生する準安定状態にトラップされてしまい、特に低温ではサンプリングがうまくいかない。これを克服するのに、低温の平衡状態に近いであろう基底状態からシミュレーションを始めるというアイデアがあるが、一般に EA モデルの基底状態の探索は系が大きくなると非常に難しい。3 次元以上ではこの問題は NP 完全であることが知られている [11]。大雑把にいうと、NP 完全問題というのは、システムサイズ N の多項式時間でその問題を解くアルゴリズムが知られていないような問題の集合である。現在、数多くの数値計算から、EA モデルでは 3 次元以上でスピングラス相が存在するが 2 次元以下では存在しないと考えられている [12]。しかし、今の計算機能力では低温でのスピングラスの振る舞いに関してはっきりとしたことが言えておらず、その描像に関していくつかの相反する主張が提出されており [13, 14, 15]、現在も様々な方法で研究が進められている。

1.2 量子スピングラス

相転移と臨界現象は多数の要素が絡み合った巨視的な現象であるため、通常、ミクロな量子効果には影響されない。それでもごく低温領域では、量子効果による相転移が起こりうる。この量子相転移は熱的な相転移とは異なったメカニズムで起こるものであり、また多くの固有の性質を持つことから近年盛んに研究されている [16]。量子スピングラスの場合、その研究自体は古典スピングラスと同時期から行われていたが、その取り扱いの難しさから発展が古典の場合と比較して遅れていた。それが近年、横磁場イジングモデルのモデル物質である $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$ に関する実験が行われ [17]、再び注目を集めるようになってきた。この系は熱揺らぎと量子揺らぎが支配する領域の明確なクロスオーバーを示すが、スピングラス相周辺での遅いダイナミクスのせいで、量子相転移点近傍での性質がはっきりとは分かっていない。ハイゼンベルグタイプの量子スピングラスに関する研究も行われているが [18]、その場合、量子効果が実験的に調節することができない上、理論的な取り扱いもイジングスピンより難しい。結果として、イジングタイプのスピングラスのほうがより精力的に研究されている。

理論的な立場からは、量子スピングラスに関する興味ある問題は、やはり $P(q)$ の構造に関するものである。古典の場合、自由エネルギー障壁が純粋状態間を（熱力学極限で）無限に高い壁で隔てるため熱揺らぎではいったん一つの状態にトラップされると脱出することができずこのことがエルゴード性の破れを生んでいた。一方量子スピングラスの場合、量子揺らぎは必ずしも障壁の高さに影響される必要はないので、それらの障壁をトンネル効果によって通り抜けられる可能性がある。これはエルゴード性を回復した（言い換えるとレプリカ対称の）スピングラス相の存在の可能性を示唆している（レプリカ対称性については後述）。

これらの疑問に答えるために、解析的に量子スピングラスを解こうとする研究が現在も行われている。それらの仕事の多くは横磁場 SK モデルに関するものである [19, 20, 21, 22]。しかし、量子スピングラスの場合、スピノペレーターの非可換性のために古典的なスピングラス理論がそのままの形では適用できず、無限レンジの場合においてもなんの近似も導入せずにこれを解くのは難しい。結果として、いくつもの相反する相図が異なる研究者らによって得られていて [22]、レプリカ対称のスピングラス相の存在についてもその真偽は不明である。

量子スピングラスの性質を理解するうえで、可解なモデルを考察することは大きな意味があると考えられる。そこで、我々は p -体相互作用イジングスピングラスに横磁場によって量子効果を導入したモデルを、 p が非常に大きい極限で考察した。横磁場がない場合、このモデルは古典的となり、Derrida によって導入されたランダムエネルギーモデル (以下 REM) と呼ばれるモデルと $p \rightarrow \infty$ の極限で一致する [23]。REM は相互作用の不規則性に起因するスピングラスとしての性質を保持している一方で、解析的に非常に取り扱いやすいモデルであることが知られている。我々は Derrida のモデルよりも広い範囲で問題を扱うが、簡単のため以降、我々のモデルも REM と表記することにする。この量子版の REM は、最初 Goldschmidt によって調べられたが [24]、いくつかの問題が未解決で残っていた。本論文ではそれらのうち多くの点を明らかにしたのでこれを報告する。

この論文は5つの章からなる。次の章では、スピングラス理論の中核をなす手法のひとつである、レプリカ法と Derrida の REM とに関する解説を行う。3 章ではレプリカ法とトロッター分解 [25] を用いて横磁場を導入した REM の解析を行う。トロッター分解は量子効果を扱う上で有益な方法であり、同じ章の最初の節で詳細に説明する。また、自由エネルギーを計算する際に、Bray と Moore によって提案された静的近似 (static approximation) [18] を用いた。これは秩序変数の虚時間（トロッター番号）への依存性を無視する近似であり、それについても同じ章で解説する。秩序変数と自由エネルギーを全ての相に関して計算し、その相図を得たということがこの論文における成果である。

静的近似のもとで導出された結果は、あくまで近似であり厳密ではないように思われる。実際、Thirumalai らは、横磁場 SK モデルを SA を用いて解析し、温度 0 極限でエントロピーが 0 にならないことを示し、SA が不正確であることを明らかにした [20]。しかし、我々は、Dobrosavljevic と Thirumalai が提案した [26]、 p が大きいことを利用した一種の摂動計算により、REM の場合、SA が厳密であることを支持する証拠を得た。これに関する詳しい議論を 4 章に示した。最後の章は以上の結果の総括に充てられている。

2 レプリカ法とランダムエネルギーモデルのレビュー

この章ではレプリカ法と古典的な REM に関して解説する．まず最初にレプリカ法の基本的な概念について説明し、そのトリッキーな部分にも触れる．その後 REM を用いてレプリカ法の実演を行い、その結果とミクロカノニカルの方法を用いた厳密な結果とを比較し、両者が一致することを見る．

2.1 レプリカ法

スピングラスモデルを解析する上で、交換相互作用を確率変数として取り扱う必要が生じる．物理量を得るためにはスピン変数と相互作用の両方に関して平均をとらなくてはならないのである．この際、平均のとり方として大まかに分けて二つの場合が考えられる．一つは両方の平均を同時に取ってしまう方法である．これはスピンの反転と相互作用の変化が同程度の時間的スケールで起こる場合に対応し、これをアニール平均と呼ぶ．もうひとつの方法は、まず相互作用を固定し、先にスピン変数だけ和をとってしまい、そのあとで相互作用に関する平均をとる方法である．この描像は相互作用の変化がスピン反転の時間的スケールよりはるかに遅い場合に対応し、これをクエンチ平均と呼ぶ．アニール平均の場合、フラストレーションが相互作用の変化（スピンの位置の変化）によって均されてしまい、スピングラス的な振る舞いが見られなくなってしまう．ゆえにスピンの凍結を含めたスピングラス的な振る舞いは、後者のクエンチ平均の場合に対応する．

クエンチ系では、相互作用に関する平均は相互作用を固定して熱力学量を計算した後で行われる．よって自由エネルギーは次のように書かれる．

$$F = -T[\log Z]. \quad (2.1)$$

ここで、 $[\dots]$ はすでに述べたように相互作用に関する平均であり、配位平均と呼ばれる．ボルツマン定数を簡単のため 1 としてある． Z は分配関数である．後はこれを計算すればよいのだが、一般に $\log Z$ の配位平均は非常に難しい．レプリカ法はこの難しさを克服するために用いられる方法である．この方法の基本的な構想は次の恒等式を用いることにある：

$$[\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z^n] - 1}{n}. \quad (2.2)$$

レプリカ法という名前は Z^n が n 個に複製された元の系の分配関数に対応することにちなんでいる．右辺の表現において、本来は実数である n がもし仮に自然数であれば、配位平均を明示的に実行することが可能である．そこで、レプリカ法の通常の処方箋では、 n が自然数だと思って $[Z^n]$ を計算し、その後自然数から実数へ解析接続することにより $n \rightarrow 0$ をとるのである¹．しかしここで問題が生じる．ほとんどの場合、自然数から実数へ解析接続には、いくつもの（原理的には無数の）接続が考えられる．故に、解の選択というのが不可避な問題として残るのである．現在では、この問題を扱うための系統的な手法が確立されている．これを Parisi 解という [8, 9]．次の節で、Parisi 解を含めたレプリカ法の手続き全体を、具体例として REM に適用しその結果を見る．

¹レプリカ法の英語名として一般に認識されているのは 2 つあり、それぞれ Replica Method と Replica Trick という．Trick というのはその数学的怪しさを込めた呼称だろうが、区別して使う場合は、恒等式 (2.2) を用いることを Replica Method と呼び、 Z^n を n が自然数として計算して解析接続する部分を Replica Trick と呼ぶようである．

2.2 ランダムエネルギーモデルへのレプリカ法によるアプローチ

2.2.1 レプリカ対称解

REM は次の p 体相互作用イジングスピングラスハミルトニアン

$$H = - \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} \quad (2.3)$$

において $p \rightarrow \infty$ の極限をとったもので記述される．ここで i はサイト番号であり σ はイジング変数である．交換相互作用 $J_{i_1 \dots i_p}$ はクエンチされた確率変数であり、その分布関数は以下のように与えられる．

$$P(J_{i_1 \dots i_p}) = \left(\frac{N^{p-1}}{J^2 \pi p!} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{N^{p-1}}{J^2 p!} (J_{i_1 \dots i_p})^2 \right\}. \quad (2.4)$$

適切に極限 $p \rightarrow \infty$ をとるために規格化定数として N^{p-1} と $p!$ が必要である．もし $p = 2$ とおけば、このモデルは SK モデルになる．レプリカ法の処方箋に従えば [27]、分配関数の n 次モーメント ($n \in \mathbb{N}$ と仮定) の配位平均を計算すればよい．

$$\begin{aligned} [Z^n] &= \int \prod_{i_1 < \dots < i_p} dJ_{i_1 \dots i_p} P(J_{i_1 \dots i_p}) Z^n \\ &= \int \prod_{i_1 < \dots < i_p} dJ_{i_1 \dots i_p} \left(\frac{N^{p-1}}{J^2 \pi p!} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{N^{p-1}}{J^2 p!} \sum_{i_1 < \dots < i_p} (J_{i_1 \dots i_p})^2 \right\} \\ &\quad \times \text{Tr} \exp \left(\beta \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sum_{\mu=1}^n \sigma_{i_1}^\mu \dots \sigma_{i_p}^\mu \right) \\ &= \text{Tr} \exp \left\{ \frac{\beta^2 J^2 p!}{4 N^{p-1}} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left(\sum_{\mu=1}^n \sigma_{i_1}^\mu \dots \sigma_{i_p}^\mu \right)^2 \right\} \\ &= \text{Tr} \exp \left\{ \frac{\beta^2 J^2 p!}{4 N^{p-1}} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\mu \neq \nu} (\sigma_{i_1}^\mu \dots \sigma_{i_p}^\mu \sigma_{i_1}^\nu \dots \sigma_{i_p}^\nu + n) \right\} \\ &= \text{Tr} \exp \left\{ \frac{\beta^2 J^2 N}{2} \sum_{\mu < \nu} \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\mu \sigma_i^\nu \right)^p \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで Tr は全てイジングスピン変数に関する和を表し、 μ と ν はレプリカ番号を表している．式 (2.5) の最後の式を導出するために次の関係式

$$\frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} = \frac{N}{p!} \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i \right)^p + O(N^0) \quad (2.6)$$

を使った．ここで次の変数を導入するのが便利である．

$$q^{\mu\nu} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\mu \sigma_i^\nu. \quad (2.7)$$

これを用いて式 (2.5) 中の $\sum_i \sigma_i^\mu \sigma_i^\nu / N$ を置き換え、制限 (2.7) はデルタ関数と $\{q^{\mu\nu}\}$ に関する積分で課すことにする。さらにデルタ関数のフーリエ表現を用いれば、(2.5) は次のように書くことができる。

$$[Z^n] = \text{Tr} \int \prod_{\mu < \nu} dq^{\mu\nu} d\tilde{q}^{\mu\nu} \exp \left\{ \frac{\beta^2 J^2 N}{2} \sum_{\mu < \nu} (q^{\mu\nu})^p - N \sum_{\mu < \nu} q^{\mu\nu} \tilde{q}^{\mu\nu} + N \sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\mu \sigma_i^\nu \right) + \frac{1}{4} \beta^2 J^2 N n \right\}. \quad (2.8)$$

ここで $\tilde{q}^{\mu\nu}$ は $q^{\mu\nu}$ のフーリエ共役変数である。スピンに関する和は、各サイト番号 i ごとに独立にとることができるようになって

$$[Z^n] = \int \prod_{\mu < \nu} dq^{\mu\nu} d\tilde{q}^{\mu\nu} \exp \left\{ \frac{\beta^2 J^2 N}{2} \sum_{\mu < \nu} (q^{\mu\nu})^p - N \sum_{\mu < \nu} q^{\mu\nu} \tilde{q}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \beta^2 J^2 N n + N \log \text{Tr} \exp \left(\sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu \right) \right\} \quad (2.9)$$

を得る。熱力学極限では、これらの積分は鞍点法によって評価することができる。鞍点条件を書き下すと、

$$q^{\mu\nu} = \frac{\text{Tr} \sigma^\mu \sigma^\nu e^L}{\text{Tr} e^L}, \quad \tilde{q}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} p \beta^2 J^2 (q^{\mu\nu})^{p-1} \quad (2.10)$$

とできる。ここで $L = \sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu$ とした。更に計算を進めるためには、 $q^{\mu\nu}$ の具体的なレプリカ番号への依存性を考慮しなくてはならない。単純に考えると、レプリカは配位平均のために人工的に導入したものであり、物理的な結果がレプリカに依存することは無いように思える。この推量によって我々はレプリカ対称性 (replica symmetry、以下 RS) の仮定 $q^{\mu\nu} = q$ へと到達する。RS の下で、秩序変数 $q^{\mu\nu}$ の物理的意味を簡単に見ることができる。式 (2.10) を以下のように書き直すと

$$q^{\mu\nu} = \left[\frac{\text{Tr} \sigma_i^\mu \sigma_i^\nu \exp^{-\beta \sum_\gamma H_\gamma}}{\text{Tr} \exp(-\beta \sum_\gamma H_\gamma)} \right] = \left[\frac{\text{Tr} \sigma_i^\mu \exp^{-\beta H_\mu} \text{Tr} \sigma_i^\nu \exp^{-\beta H_\nu}}{\text{Tr} \exp(-\beta H_\mu) \text{Tr} \exp(-\beta H_\nu)} \right] = [\langle \sigma_i^\mu \rangle \langle \sigma_i^\nu \rangle] = [\langle \sigma_i \rangle^2] \quad (2.11)$$

を得る。ここで H_γ は γ 番目の複製されたハミルトニアンで

$$H_\gamma = - \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1}^\gamma \dots \sigma_{i_p}^\gamma \quad (2.12)$$

で与えられる。また式 (2.11) の最後の表現は各レプリカの独立性から導かれる。ゆえに $q^{\mu\nu} = q$ は 1 章で説明したスピングラス秩序変数を表すことが分かる。

RS の仮定の下、式 (2.9) 中の μ と ν に関する 2 重和 ($\sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu$) は次のように書ける。

$$\sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu = \frac{\tilde{q}}{2} \left\{ \left(\sum_\mu \sigma^\mu \right)^2 - n \right\} \quad (2.13)$$

また分配関数は、

$$[Z^n] \approx \exp \left[N \left\{ \beta^2 J^2 \frac{n(n-1)}{4} q^p - \frac{n(n-1)}{2} q \tilde{q} + \frac{1}{4} n \beta^2 J^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} n \tilde{q} + \log \text{Tr} \int Dz \exp \left(\sqrt{\tilde{q}} z \sum_{\mu} \sigma^{\mu} \right) \right\} \right] \quad (2.14)$$

となる。ここで

$$Dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (2.15)$$

という記法を用いた。この z に関する積分は、2 次の項を 1 次に落とすために使われる変換で

$$\exp \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} + xz \right) \quad (2.16)$$

この操作を Hubbard-Stratonovich 変換と呼ぶ。ここに至り、スピンに関する和が各レプリカごとに独立に取れるようになり、自由エネルギー f を具体的に計算できるようになった。特に $n \rightarrow 0$ の極限で、

$$-\beta f = \frac{1}{N} [\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{[Z^n] - 1}{n}, \\ = -\frac{1}{4} \beta^2 J^2 q^p + \frac{1}{2} q \tilde{q} + \frac{1}{4} \beta^2 J^2 - \frac{1}{2} \tilde{q} + \int Dz \log 2 \cosh(\sqrt{\tilde{q}} z) \quad (2.17)$$

となり、また鞍点条件は次の状態方程式を導く。

$$q = \int Dz \tanh^2(\sqrt{\tilde{q}} z), \quad (2.18)$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{2} p \beta^2 J^2 q^{p-1}. \quad (2.19)$$

SK モデル ($p=2$) の場合、相境界をランダウ展開から決めることができる。式 (2.18) を q に関して展開し 1 次まで残すと、

$$q = \beta^2 J^2 q. \quad (2.20)$$

この方程式は SK モデルが 2 次転移を起こし、その転移温度が $T = J$ で与えられることを示している。

一方 REM の場合、極限 $p \rightarrow \infty$ をとる。故に式 (2.19) から \tilde{q} の値は 0 か ∞ となる。各秩序変数の値 $\tilde{q} = 0$ と $\tilde{q} = \infty$ は $q < 1$ と $q = 1$ の場合にそれぞれ対応する。これらの条件を状態方程式 (2.18) に代入し矛盾がないか確かめることにより、次の二つの解 $(q, \tilde{q}) = (0, 0), (1, \infty)$ を得る。解 $(q, \tilde{q}) = (0, 0)$ は常磁性相に対応しその自由エネルギーは式 (2.17) に具体的な値を代入することによって得られ、

$$f_P = -T \log 2 - \frac{J^2}{4T} \quad (2.21)$$

となり、またそのエントロピーは

$$S = \log 2 - \frac{J^2}{4T^2} \quad (2.22)$$

である．これは明らかに $T^* = J/(2\sqrt{\log 2})$ 以下で負になる．このことは、 T^* 以上の温度で相転移があることを示唆しており、実際、後で見るように $T = T^*$ でスピングラス相への相転移が起こる．

もう一つの解 $(q, \tilde{q}) = (1, \infty)$ はスピングラス解を表している．この自由エネルギーも計算できて

$$f_{SG} \rightarrow -T \sqrt{\frac{2\tilde{q}}{\pi}} \rightarrow -\infty \quad (p \rightarrow \infty) \quad (2.23)$$

となる．この解はスピングラス相の自由エネルギーが常に常磁性相のものより小さいということを示しているが、これは明らかに非物理的である．実際、多くの場合 RS 解はスピングラス相では誤った解を与えてしまうことが知られている．

例えば、SK モデル ($p = 2$) の場合、RS 解は低温極限で負のエントロピーを与えることが分かっている．これは明らかに熱力学第3法則に反している．研究の早い段階では、この問題は極限の不適切な入れ替え、すなわち $n \rightarrow 0$ と $N \rightarrow \infty$ の順序を変えてしまうことに原因があると考えられた．正しい順序では、まず極限 $n \rightarrow 0$ をとり、その後 $N \rightarrow \infty$ の極限をとるべきだが、我々は鞍点法を用いるために最初に極限 $N \rightarrow \infty$ をとっていた．この点はレプリカ理論の正当性と深く関わっており、現在も関連した研究が進められているが、ここではこれ以上深入りはしない(もう少し詳しい議論が [28] に簡潔な形である)．結局、長年の研究から、この問題はレプリカ対称性の破れ (replica symmetry breaking、以下 RSB) を考慮し適切な解を構成すれば回避できることが、経験的に明らかになったため、現在では上のような問題に頭を悩ませる必要はなくなった．この適切な解構成というのが先に述べた Parisi 解である．

2.2.2 レプリカ対称性の破れ

低温でのスピングラス相の振る舞いを見るためには、 $q^{\mu\nu}$ のレプリカ添え字への依存性を取り入れる必要がある．もちろん $q^{\mu\nu}$ の一般的な形はわからないので、いろいろ試してみてそれが正しい解のもつべき必要条件をみたしているかどうかを調べていくしかない．Parisi はレプリカ対称性が階層的に破れるという描像のもとでひとつの解を提出した．具体的には次のような再帰的なアルゴリズムによって、Parisi 解は構成される：

(i) 第1段階: n 個のレプリカを、 m_1 個のレプリカから成る、 n/m_1 個のクラスターにグループ分けする．同じクラスター中では、それぞれの $q^{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) は同じ一つの値 q_1 を持つことにする．一方、異なるクラスター間のレプリカ間では $q^{\mu\nu} = q_0 \leq q_1$ を持つことにする．

(ii) 第2段階: サイズ m_1 のクラスターそれぞれを $m_2 < m_1$ 個のレプリカでなる m_1/m_2 個のサブクラスターに分割する．同じサブクラスターに属するレプリカ間では $q^{\mu\nu} = q_2 \geq q_1$ の値を持つとし、それ以外はそのままとする．

この手順を繰り返すことにより、レプリカ対称性が k ステップに破れた場合を一般的に得ることができる．

$$n \geq m_1 \geq m_2 \cdots \geq m_k \geq 1, \quad q_k \geq q_{k-1} \geq \cdots \geq q_1 \geq q_0. \quad (2.24)$$

以下の例は2ステップのRSBで、 $n = 12, m_1 = 6, m_2 = 3$ とおいた場合である。

$$\{q^{\mu\nu}\} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} 0 & q_2 & q_2 \\ q_2 & 0 & q_2 \\ q_2 & q_2 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} q_1 \\ \\ \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \\ q_1 \\ \\ \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & q_2 & q_2 \\ q_2 & 0 & q_2 \\ q_2 & q_2 & 0 \end{array} & \\ \hline & q_0 & \\ \hline & \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} 0 & q_2 & q_2 \\ q_2 & 0 & q_2 \\ q_2 & q_2 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} q_1 \\ \\ \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{c} \\ q_1 \\ \\ \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & q_2 & q_2 \\ q_2 & 0 & q_2 \\ q_2 & q_2 & 0 \end{array} \end{array} \right). \quad (2.25)$$

極限 $n \rightarrow 0$ をとるためには、各 m_i の処理法を考えなければならないが、Parisi 解では、それらが連続変数となりしかも上記の不等式を逆転させた関係にあると仮定する。

$$0 \leq m_1 \leq \dots \leq 1. \quad (2.26)$$

以上が Parisi 解の基本的な構想である。

2.2.3 レプリカ対称性の破れの物理的意味

SK モデルにおいては、低温の振る舞いを正しく記述するには ∞ ステップのRSB 解が必要であることが知られている。このとき自由エネルギーは以下のように与えられる。

$$\beta f = -\frac{\beta^2 J^2}{4} \left\{ 1 + \int_0^1 q^2(x) dx - 2q(1) \right\} - \int Dz f_0(0, \sqrt{q(0)}z). \quad (2.27)$$

関数 f_0 は、次の Parisi 方程式と呼ばれる方程式

$$\frac{\partial f_0(x, h)}{\partial x} = -\frac{J^2}{2} \frac{dq}{dx} \left\{ \frac{\partial^2 f_0}{\partial h^2} + x \left(\frac{\partial f_0}{\partial h} \right) \right\} \quad (2.28)$$

の、初期条件 $f_0(1, h) = \log 2 \cosh \beta h$ における解である。式 (2.27) を $q(x)$ に関して最大化することによって、SK モデルのスピングラス相の真の解が得られる。

RSB は当初、RS 解の不合理を克服するために導入されたが、RSB 解そのものに、深い物理的な意味があることが現在では分かってきている。スピングラスは安定したいくつもの状態が共存している状態と考えられるが、これは自由エネルギーを状態の関数として書くとき、それがたくさん極小値（谷）を持つことを意味している。そこで自由エネルギーがそのような多谷構造を持つと考えると、RSB の物理的意味がよく理解できるようになるのである。

一般に、自由エネルギーに多くの谷が有る場合、谷と谷の間の自由エネルギー障壁のために、物理量の長時間平均と真の熱平衡値とを区別する必要がある。一つの谷にトラップされている状態

での物理量を観察するために、Edwards-Anderson オーダーパラメータと呼ばれる次の変数 q_{EA} を導入する.

$$q_{EA} \equiv \left[\sum_a P_a (m_i^a)^2 \right]. \quad (2.29)$$

ここで P_a は系が谷 a に捕らえられている確率であり、 m_i^a はその谷におけるサイト i の局所磁化である. その物理的意味を考えると、この q_{EA} という量は次のように書くこともできる.

$$q_{EA} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} [\langle \sigma_i(0) \sigma_i(t) \rangle]. \quad (2.30)$$

長時間極限 $\lim_{t \rightarrow \infty}$ に先立って、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ を先にとるこの式は、 q_{EA} が一つの谷における長時間平均値であることを示している (熱力学極限を先にとることによって、エネルギー障壁が無限大に高くなり、そのため系は一つの谷から脱出することができなくなる). 同様に真の統計力学的平均値を調べるために次の変数が導入される.

$$\bar{q} \equiv \left[\sum_a \sum_b P_a P_b m_i^a m_i^b \right] = \left[\left(\sum_a P_a m_i^a \right)^2 \right]. \quad (2.31)$$

この量は、その物理的意味から、式 (2.30) のように

$$\bar{q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} [\langle \sigma_i(0) \sigma_i(t) \rangle] \quad (2.32)$$

と書き直すことができる. 故に \bar{q} は、全ての状態における物理量をその重みごとに考慮した、真の意味での統計力学的平均値であると解釈することができる. 一つしか谷がない場合、この二つの変数は一致するが一般には、 $q_{EA} > \bar{q}$ である. この二つの変数の差 $q_{EA} - \bar{q}$ は相空間の多重度を判定する目安となる. 以上の考察から、スピングラスの相空間の多様性を反映して、秩序変数が \bar{q} から q_{EA} まで連続的に分布し、またそれが SK モデルにおける Parisi 解の $q(x)$ に対応していると期待できて、実際現在ではそのように解釈されている. そこで、上述の各秩序変数が、レプリカ法の言葉にどのように対応するかを以下で見る.

統計力学的平均値 \bar{q} はすべての可能な状態の平均値であると解釈できるのでそれを各レプリカ間のオーバーラップ $q^{\mu\nu} = [\langle \sigma_i^\mu \sigma_i^\nu \rangle]$ の全平均であると考えたと

$$\bar{q} = \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{n(n-1)} q^{\mu\nu} = \int_0^1 q(x) dx \quad (2.33)$$

という等式を得ることができる. 一方、一つの谷におけるスピングラス秩序変数の値は、異なる状態間の重なりを考慮する必要がないため、他の可能な値よりも大きい値をとると考えられる. 故に q_{EA} を $q^{\mu\nu}$ の最大値と同一視することができて、

$$q_{EA} = \max_{(\mu, \nu)} q^{\mu\nu} = \max_x q(x). \quad (2.34)$$

以上から q_{EA} と \bar{q} を $q(x)$ と対応付けることができた. 上の議論をまとめると、スピングラスの熱力学量を正しく評価するには、自由エネルギーの多谷構造を考慮しなければならない. その自由エネルギーの構造は、レプリカ法では RSB によって表現されるということである. もう少し踏み込んで言えば、レプリカ添え字の組 (μ, ν) が、自由エネルギーのどれかひとつの谷に対応しているということができる. この解釈によれば、自由エネルギーの多谷性を起源とするエルゴード性の破れが、RSB と自然に結びついていることが分かる. より詳細な議論は、文献 [29] を参照のこと.

2.2.4 REM のスピングラス解

REM においては、1 ステップの RSB(1RSB) で正しい解が得られることが知られている。この証明はかなり直感的に与えることができる。式 (2.10) と (2.24) から、全ての q_i が 1 より小さいと仮定すると、全ての \tilde{q}_i が $p \rightarrow \infty$ の極限で 0 となり、その結果 RS 解が復活することが分かる。そこで条件 $q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_{k-1} < q_k = 1$ を仮定すると、やはり全ての q_i ($i < k$) が $p \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束し結果、高次の RSB が $q_0 = 0, q_1 = 1$ の 1RSB に帰着する。この証明の詳細は Gross と Mézard によって与えられている [30]。

さて、REM の自由エネルギーの計算に戻ろう。1RSB を用いれば、式 (2.9) における μ と ν に関する 2 重和 ($\sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu$) は、

$$L = \sum_{\mu < \nu} \tilde{q}^{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{q}_0 \left(\sum_{\mu} \sigma^\mu \right)^2 + (\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0) \sum_{\text{block}} \left(\sum_{\mu \in \text{block}} \sigma^\mu \right)^2 - n \tilde{q}_1 \right\} \quad (2.35)$$

と書くことができる。右辺の最初の項は、 $\{q^{\mu\nu}\}$ を q_0 で埋め尽くす項であり、第 2 項は、ブロック部分の q_0 を q_1 で置き換える項、第 3 項は対角要素を 0 にする項である。同様に $(q^{\mu\nu})^p$ は、

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{\mu < \nu} (q^{\mu\nu})^p = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left(n^2 q_0^p + \frac{n}{m_1} m_1^2 (q_1^p - q_0^p) - n q_1^p \right) = \frac{1}{2} \{ (m_1 - 1) q_1^p - m_1 q_0^p \} \quad (2.36)$$

となる。ここで Hubbard-Stratonovich 変換を行えば、

$$e^L = e^{-\tilde{q}_0 n/2} \int D z_1 \prod_{\text{block}}^{n/m_1} \left\{ \int D z_2 \prod_{\mu \in \text{block}}^{m_1} \exp \left((\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2) \sigma^\mu \right) \right\} \quad (2.37)$$

を得る。スピンに関する和は各レプリカごとに独立にとれて、故に自由エネルギーは

$$\begin{aligned} -\beta f = & \frac{1}{2} q_1 \tilde{q}_0 + \frac{1}{2} (1 - m_1) q_1 \tilde{q}_1 - \frac{1}{4} \beta^2 J^2 q_0^p - \frac{1}{4} (1 - m_1) \beta^2 J^2 q_1^p + \frac{1}{4} \beta^2 J^2 - \frac{1}{2} \tilde{q}_1 \\ & + \frac{1}{m_1} \int D z_1 \log \int D z_2 \cosh^{m_1} (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2) + \log 2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

と計算される。状態方程式は、

$$q_0 = \int D z_1 \left(\frac{\int D z_2 \cosh^{m_1} (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2) \tanh (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2)}{\int D z_2 \cosh^{m_1} (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2)} \right)^2, \quad (2.39)$$

$$q_1 = \int D z_1 \frac{\int D z_2 \cosh^{m_1} (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2) \tanh^2 (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2)}{\int D z_2 \cosh^{m_1} (\sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2)}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{q}_0 = \frac{1}{2} \beta^2 J^2 p q_0^{p-1}, \quad \tilde{q}_1 = \frac{1}{2} \beta^2 J^2 p q_1^{p-1} \quad (2.41)$$

となる。ここで $q_0 = q_1$ とおけば RS 解 (2.18)、(2.19) が再現される。1RSB が RS を異なる解を持つためには、不等式 $q_0 < q_1$, ($\tilde{q}_0 < \tilde{q}_1$) が満たされなければならない。条件 $q_1 < 1$ を仮定すると、先の高次の RSB が不要であることを示した議論と同様にして $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1 = 0$ が帰結され、故に RS 解 $q_0 = q_1 = 0$ が導かれてしまう。そこで条件 $q_1 = 1, q_0 < 0$ が必須である。この条件は式 (2.39) において、分子の z_1 積分が消えて、結果 z_2 の奇関数となり q_0 が 0 になることを意味し、

従ってスピングラス解として $(q_0, q_1) = (0, 1)$ を得る. これを自由エネルギーの表式 (2.38) に代入すれば、 $p \rightarrow \infty$ の極限で次の式

$$-\beta f = \frac{\beta^2 J^2}{4} m_1 + \frac{1}{m_1} \log 2 \quad (2.42)$$

を得る. m_1 に関する変分条件を取ると

$$(m_1 \beta J)^2 = 4 \log 2 \quad (2.43)$$

となり、これを代入し最終的な解として

$$f_{SG} = -J\sqrt{\log 2} \quad (2.44)$$

を得る. 転移温度 T_c は条件 $f_{SG} = f_P$ より

$$T_c = \frac{J}{2\sqrt{\log 2}} = T^* \quad (2.45)$$

となり、常磁性相のエントロピーが消失する温度 T^* において相転移が起こることがわかった. このとき秩序変数 q_1 は不連続に変化するが、エントロピーは連続的に消失するので熱力学的な意味で2次相転移といえる. 温度 T_c 以下では系はエントロピーを失って完全に凍結することが分かる.

2.3 ミクロカノニカルの方法

この節では、ミクロカノニカルの方法によってレプリカ法と同様の結果が得られることを見る. この方法はレプリカ法とは全く異なるものであり、数学的に怪しい所はなくその結果は厳密である.

ミクロカノニカルの方法に必要なのは、ハミルトニアン (2.3) の $p \rightarrow \infty$ 極限でのエネルギー分布であり、まずそれを調べる必要がある. あるスピン配位 $\{\sigma\}$ が持つエネルギーの分布は次のように書ける.

$$P(E) = [\delta(E - H(\{\sigma\}))]. \quad (2.46)$$

デルタ関数のフーリエ表現を用いれば、配位平均は簡単に実行することができる. その結果は

$$P(E) = \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \exp\left(-\frac{E^2}{NJ^2}\right) \quad (2.47)$$

となる. 同じ相互作用を持ち二つの独立なスピン配位 $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$ のハミルトニアンがエネルギー E_1, E_2 を持つ確率分布 $P(E_1, E_2)$ も同様に計算することができて

$$\begin{aligned} P(E_1, E_2) &= [\delta(E_1 - H(\{\sigma^{(1)}\}))\delta(E_2 - H(\{\sigma^{(2)}\}))] \\ &= \frac{1}{N\pi J^2 \sqrt{(1+q^p)(1-q^p)}} \exp\left(-\frac{E_1^2 + E_2^2}{2NJ^2(1+q^p)} - \frac{E_1^2 - E_2^2}{2NJ^2(1-q^p)}\right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる. ここで $q = \sum_i \sigma_i^{(1)} \sigma_i^{(2)} / N$ と置いた. 2つのスピン配位は独立であるので $|q|$ は常に1以下である. ゆえに $p \rightarrow \infty$ の極限で、 $P(E_1, E_2)$ は

$$P(E_1, E_2) \rightarrow P(E_1)P(E_2) \quad (2.49)$$

となり異なるスピン配位のエネルギー分布は独立となる．このことは各エネルギー準位が、ガウス分布から生成される独立な確率変数であることを意味する．この性質が「ランダムエネルギーモデル」の名前の由来となっている．同様な結果を3つ、あるいはそれ以上のエネルギー準位 $P(E_1, E_2, \dots)$ に関しても得ることができる．

エネルギー分布が分かったので、エネルギー E の状態の数を数えることができ

$$n(E) = 2^N P(E) = \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \exp N \left\{ \log 2 - \left(\frac{E}{NJ} \right)^2 \right\} \quad (2.50)$$

となる．熱力学極限 ($N \rightarrow \infty$) で、 $|E| < NJ\sqrt{\log 2} \equiv E_0$ の範囲には非常に多数の状態があるが $|E| \geq E_0$ の範囲には準位がないことがわかる．ゆえに $|E| < E_0$ でのエントロピーは

$$S(E) = \log n(E) = N \left\{ \log 2 - \left(\frac{E}{NJ} \right)^2 \right\} \quad (2.51)$$

となり、あとは温度の定義から

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T(E)} \Leftrightarrow E = -\frac{NJ^2}{2T} \quad (2.52)$$

を得る．カノニカルアンサンブルの場合を考えれば式 (2.52) は温度 T の熱浴に接しているときの系のエネルギーを表していると解釈できる．ここで E_0 以下にエネルギー準位を持たないことから、逆に $T_c \equiv NJ^2/(2E_0) = J/(2\sqrt{\log 2})$ 以下の温度では、系は一つの状態に完全に凍結してしまい、エントロピーが消失し、内部エネルギーは $T = T_c$ での値を保持することが分かる．ゆえに自由エネルギーは次のように与えられる．

$$f = \begin{cases} -T \log 2 - \frac{J^2}{4T} & (T > T_c) \\ -J\sqrt{\log 2} & (T < T_c) \end{cases} \quad (2.53)$$

これはレプリカ法の結果と同じである．

もちろん REM はスピングラスモデルの中でも非常に単純なモデルの一つであり、現実の物質でこのようなハミルトニアンによって記述されるものがあるわけではない．しかしその解析性の高さから、スピングラスや情報処理 [31] の問題に対して非常に多くの知見を与えてきた．ここでは、REM の利点を用いて、レプリカ法が信頼に足る方法であることを示す議論を与えたことになる．次の章では、REM の量子版の解析を行う．先に述べたように量子スピングラスは古典の場合より込み入っているが、その性質を調べる上でも REM が有益な情報を与えてくれることを見る．

3 横磁場中のランダムエネルギーモデルの解析

横磁場ランダムエネルギーモデルは、Goldschmidt によって初めて解析され [24]、その相図がスピングラス相（以下 SG 相）と二つの常磁性相をから成ることが示された．それら常磁性相のうちのひとつが式 (2.21) で表される古典常磁性相（以下 CP 相）であり、もう一方が、横磁場によって誘起された量子常磁性相（以下 QP 相）である．この結果は、量子スピングラスが解析的に解かれ、熱揺らぎと量子揺らぎの違いが顕に明らかにされた数少ない例の一つである．

この章では、Goldschmidt の用いたモデルを強磁性バイアスがある場合に拡張したモデルを解析する。強磁性相（以下 F 相）における量子揺らぎの影響は自明ではなく、ランダムネス、量子揺らぎ、強磁性バイアスという三つの競合する効果に、系がどのように影響を受けるかは興味ある問題である。

ハミルトニアンは次の式

$$H = - \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1}^z \dots \sigma_{i_p}^z - \Gamma \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \quad (3.1)$$

で与えられる。ここで σ^z 、 σ^x はパウリスピン演算子であり、 Γ は横磁場の強さを表す。相互作用 $J_{i_1 \dots i_p}$ の確率分布関数は次の式

$$P(J_{i_1 \dots i_p}) = \left(\frac{N^{p-1}}{J^2 \pi p!} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{N^{p-1}}{J^2 p!} \left(J_{i_1 \dots i_p} - \frac{j_0 p!}{N^{p-1}} \right)^2 \right\} \quad (3.2)$$

とする。ここで j_0 は強磁性バイアスであり、相互作用の平均値である。

量子スピングラスの場合、スピン変数が数ではなく非可換なオペレータであるため、前章のように素直にレプリカ法を用いることができない。トロッター分解はこのようなときに便利な方法である [25]。この方法を用いると、秩序変数がトロッター番号（経路積分の虚時間と同一）に依存するようになるために、それらの値を自己無撞着になるように計算しなければならない。結果として問題は非常に難しくなる。この困難を回避するために考えられたのが、秩序変数の時間依存性を無視する静的近似（以下 SA）であり、この章では我々もそれを用いる。

3.1 トロッター分解

量子系を扱うための通常の戦略では、何らかの方法で非可換なオペレータを c-数として取り扱うことが多い。トロッター分解もそのような定式化のひとつである。その基本的な構想は、次の恒等式を用いることにある：

$$\left(e^{K/M} e^{U/M} \right)^M = \exp \left(K + U + \frac{1}{2M} [K, U] + O(M^{-2}) \right) \rightarrow \exp(K + U) \quad (M \rightarrow \infty). \quad (3.3)$$

この節でのみ、 $[\dots]$ は、交換関係を表すものとする。式 (3.1) の経路積分表現を導くため、ハミルトニアン (3.1) を以下のように U と K に分割する。

$$U = - \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1}^z \dots \sigma_{i_p}^z, \quad K = -\Gamma \sum_{i=1}^N \sigma_i^x. \quad (3.4)$$

分配関数 Z はこのとき

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-H/T} = \text{Tr}(e^{-H/MT})^M = \text{Tr}(e^{-(K+U)/MT})^M \\ &= \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_M} \langle \sigma_1 | e^{-(K+U)/MT} | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | e^{-(K+U)/MT} \dots | \sigma_M \rangle \langle \sigma_M | e^{-(K+U)/MT} | \sigma_1 \rangle \\ &\approx \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_M} \langle \sigma_1 | e^{-K/MT} e^{-U/MT} | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | e^{-K/MT} e^{-U/MT} \dots | \sigma_M \rangle \langle \sigma_M | e^{-K/MT} e^{-U/MT} | \sigma_1 \rangle \\ &\equiv Z_M \end{aligned} \quad (3.5)$$

と書くことができる。オペレータの M 重積の間に恒等演算子 $1 = \sum_{\sigma_t} |\sigma_t\rangle\langle\sigma_t|$ を挿入すれば²、2 行目の式のようになる。ここで $\sigma_t = \{\sigma_{i,t}\}$ は t 番目に挿入した完全系のスピン配位を表す。もとが Tr であるから周期境界条件 $\sigma_{M+1} = \sigma_1$ がトロッター方向に課されなければならない。

ここで基底として U を対角化するものを選ぶと、

$$\langle\sigma_t|e^{-U/MT}e^{-K/MT}|\sigma_{t+1}\rangle = \langle\sigma_t|e^{-K/MT}|\sigma_{t+1}\rangle e^{-U(\sigma_t)/MT} \quad (3.6)$$

が得られる。異なるサイトのスピンは交換するので、式 $\langle\sigma_t|e^{-K/MT}|\sigma_{t+1}\rangle$ は

$$\langle\sigma_t|e^{-K/MT}|\sigma_{t+1}\rangle = \prod_i^N \langle\sigma_{i,t}|\exp\left(\frac{\Gamma}{MT}\sigma_i^x\right)|\sigma_{i,t+1}\rangle \quad (3.7)$$

と積に分解でき、スピン-1/2 の代数から次の関係が得られる。

$$\langle\sigma_{i,t}|\exp\left(\frac{\Gamma}{MT}\sigma_i^x\right)|\sigma_{i,t+1}\rangle = C e^{B\sigma_{i,t}\sigma_{i,t+1}}. \quad (3.8)$$

ここで

$$B = \frac{1}{2} \ln \coth \frac{\Gamma}{TM}, \quad C = \left(\frac{1}{2} \sinh \frac{2\Gamma}{TM}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

と置いた。ゆえに t 番目の中間状態は

$$\langle\sigma_t|e^{-K/MT}e^{-U/MT}|\sigma_{t+1}\rangle = C^N \exp\left(\frac{U(\sigma_t)}{MT} + B \sum_i \sigma_{i,t}\sigma_{i,t+1}\right) \quad (3.10)$$

と表現できる。従って分配関数は

$$Z \approx Z_M = C^{MN} \sum_{\sigma^1} \cdots \sum_{\sigma^M} \exp\left\{\sum_{t=1}^M \left(\frac{U(\sigma_t)}{MT} + B \sum_i \sigma_{i,t}\sigma_{i,t+1}\right)\right\} \quad (3.11)$$

となりこれは新たにトロッター方向の次元が加わった古典的なイジングスピンの分配関数である。式 (3.11) における誤差は、 $O(M^{-2})$ であり、 $M \rightarrow \infty$ の極限で消失する。

3.2 レプリカ解析

前節の結果から、トロッター分解によって得られる次の分配関数を計算の出発点とすればよい。

$$Z_M = C^{MN} \text{Tr} \exp\left(\frac{\beta}{M} \sum_{t=1}^M \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1,t} \dots \sigma_{i_p,t} + B \sum_{t=1}^M \sum_i \sigma_{i,t} \sigma_{i,t+1}\right). \quad (3.12)$$

ここで Tr はスピン σ に関する和を表す。レプリカ法を用いて配意平均を実行すれば、

$$\begin{aligned} [Z_M^n] = & \text{Tr} \exp\left(\frac{\beta^2 J^2 N}{4M^2} \sum_{t,t'=1}^M \sum_{\mu,\nu=1}^n \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i,t}^\mu \sigma_{i,t'}^\nu\right)^p\right. \\ & \left. + \frac{\beta j_0 N}{M} \sum_{t=1}^M \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i,t}^\mu\right)^p + B \sum_{t=1}^M \sum_{\mu=1}^n \sum_i \sigma_{i,t}^\mu \sigma_{i,t+1}^\mu\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

²この、挿入された完全系のことをトロッターレプリカ、あるいはトロッタースライスと呼ぶ

を得る。レプリカ添え字は μ, ν と置いた。配位平均は再び $[\dots]$ と書く。またいくつかの有意でない定数は落とした。スピンの積の項 $(\sum_i \sigma_{i,t}^\mu \sigma_{i,t'}^\nu / N)^p$ を線形化するために、古典的な REM(2.7) の場合と同様にして、積分変数 $q_{tt'}^{\mu\nu}$ とデルタ関数 $\delta(q_{tt'}^{\mu\nu} - \sum_i \sigma_{i,t}^\mu \sigma_{i,t'}^\nu / N)$ を導入する。また、デルタ関数は共役変数 $\tilde{q}_{tt'}^{\mu\nu}$ によるフーリエ変換によって表現する。

現在のケースでは、対角項 $q_{tt'}^{\mu\mu}$ と非対角項 $q_{tt'}^{\mu\nu} (\mu \neq \nu)$ を区別する必要がある。物理的には、 $q_{tt'}^{\mu\mu}$ は量子揺らぎを測る目安であり、 $q_{tt'}^{\mu\nu}$ はスピングラス秩序変数である。量子揺らぎがない場合、スピン配位 $\sigma_{i,t}^\mu$ は虚時間 t に依存しなくなり、 $q_{tt'}^{\mu\mu} = 1$ となる。量子揺らぎは $q_{tt'}^{\mu\mu}$ を 1 より小さくなるよう抑制する。ゆえに $1 - q_{tt'}^{\mu\mu}$ は量子揺らぎを測る秩序変数となることが分かる。また $(\sum_i \sigma_{i,t}^\mu / N)^p$ を簡略化するために磁化 m_t^μ も導入し、制約 $m_t^\mu = \sum_i \sigma_{i,t}^\mu / N$ は、デルタ関数の共役変数 \tilde{m}_t^μ によるフーリエ表現を用いることによって課す。以上の変換によって分配関数は

$$\begin{aligned}
 [Z_M^n] = & \int \prod_{\mu} \prod_t dm_t^\mu d\tilde{m}_t^\mu \prod_{\mu < \nu} \prod_{t, t'} dq_{tt'}^{\mu\nu} d\tilde{q}_{tt'}^{\mu\nu} \prod_{\mu} \prod_{t \neq t'} dq_{tt'}^{\mu\mu} d\tilde{q}_{tt'}^{\mu\mu} \\
 & \times \exp N \left\{ \sum_{t, t'} \sum_{\mu < \nu} \left(\frac{\beta^2 J^2}{2M^2} (q_{tt'}^{\mu\nu})^p - \frac{1}{M^2} \tilde{q}_{tt'}^{\mu\nu} q_{tt'}^{\mu\nu} \right) + \sum_{t, t'} \sum_{\mu} \left(\frac{\beta^2 J^2}{4M^2} (q_{tt'}^{\mu\mu})^p - \frac{1}{M^2} \tilde{q}_{tt'}^{\mu\mu} q_{tt'}^{\mu\mu} \right) \right. \\
 & \left. + \sum_t \sum_{\mu} \left(\frac{\beta^2 j_0}{M} (m_t^\mu)^p - \frac{1}{M} \tilde{m}_t^\mu m_t^\mu \right) + \log \text{Tr} \exp(-H_{\text{eff}}) \right\} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

となる。ここで H_{eff} は有効ハミルトニアンであり

$$H_{\text{eff}} = -B \sum_t \sum_{\mu} \sigma_t^\mu \sigma_{t+1}^\mu - \frac{1}{M} \sum_{\mu} \sum_t \tilde{m}_t^\mu \sigma_t^\mu - \frac{1}{M^2} \sum_{\mu < \nu} \sum_{t, t'} \tilde{q}_{tt'}^{\mu\nu} \sigma_t^\mu \sigma_{t'}^\nu - \frac{1}{M^2} \sum_{\mu} \sum_{t \neq t'} \tilde{q}_{tt'}^{\mu\mu} \sigma_t^\mu \sigma_{t'}^\mu \quad (3.15)$$

で与えられる。熱力学極限では、複製された系の自由エネルギー F を鞍点法によって計算することができて、その結果は

$$\begin{aligned}
 -\beta F = & \sum_{t, t'} \sum_{\mu < \nu} \left(\frac{\beta^2 J^2}{2M^2} (q_{tt'}^{\mu\nu})^p - \frac{1}{M^2} \tilde{q}_{tt'}^{\mu\nu} q_{tt'}^{\mu\nu} \right) + \sum_{t, t'} \sum_{\mu} \left(\frac{\beta^2 J^2}{4M^2} (q_{tt'}^{\mu\mu})^p - \frac{1}{M^2} \tilde{q}_{tt'}^{\mu\mu} q_{tt'}^{\mu\mu} \right) \\
 & + \sum_t \sum_{\mu} \left(\frac{\beta j_0}{M} (m_t^\mu)^p - \frac{1}{M} \tilde{m}_t^\mu m_t^\mu \right) + \log \text{Tr} \exp(-H_{\text{eff}}) \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

となり、鞍点条件から状態方程式

$$q_{tt'}^{\mu\nu} = \langle \sigma_t^\mu \sigma_{t'}^\nu \rangle, \quad \tilde{q}_{tt'}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \beta^2 J^2 p (q_{tt'}^{\mu\nu})^{p-1}, \quad (3.17a)$$

$$q_{tt'}^{\mu\mu} = \langle \sigma_t^\mu \sigma_{t'}^\mu \rangle, \quad \tilde{q}_{tt'}^{\mu\mu} = \frac{1}{4} \beta^2 J^2 p (q_{tt'}^{\mu\mu})^{p-1}, \quad (3.17b)$$

$$m_t^\mu = \langle \sigma_t^\mu \rangle, \quad \tilde{m}_t^\mu = \beta j_0 p (m_t^\mu)^{p-1} \quad (3.17c)$$

が得られる。ここで $\langle \dots \rangle$ は重み $\exp(-H_{\text{eff}})$ による平均を表す。秩序変数が虚時間に高度に依存しているために、これらの方程式を厳密に解くのは困難である。しかし、極限 $p \rightarrow \infty$ では、各共役変数が 0 か ∞ しかとれないために非常に問題がシンプルになる可能性がある。例えば、式 (3.17c) と条件 $0 \leq m_t^\mu \leq 1$ から、 $\tilde{m}_t^\mu \rightarrow 0$ ($0 \leq m_t^\mu < 1$) か $\tilde{m}_t^\mu \rightarrow \infty$ ($m_t^\mu \rightarrow 1$) の 2 つの場合のみがあると帰結される。ゆえに SA は厳密に成り得る可能性があり、このことは次の章で詳しく議論する。

3.3 レプリカ対称解

計算を進めるために RS を仮定しよう．それに加えて静的近似を用いれば、秩序変数は次の 3 つ

$$q_{tt'}^{\mu\mu} \equiv \chi, \quad q_{tt'}^{\mu\nu} \equiv q, \quad m_t^\mu \equiv m \quad (3.18)$$

になる．すでに述べたように χ は量子揺らぎの効果を測る秩序変数であり、 q はスピングラス秩序変数、 m は磁化である．自由エネルギーは、より簡単に

$$\begin{aligned} -\beta f &\equiv -\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\beta F}{n} \\ &= \frac{1}{4} \beta^2 J^2 (\chi^p - q^p) + \frac{1}{2} \tilde{q} q - \tilde{\chi} \chi + \beta j_0 m^p - \tilde{m} m + \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \text{Tr} \exp(-H_{\text{eff}}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる．全ての秩序変数と共役変数が時間とレプリカ添え字について独立であるため、 H_{eff} の中のスピンの積の項は次のように書きなおすことができる．

$$\sum_{\mu < \nu} \sum_{t, t'} \sigma_t^\mu \sigma_{t'}^\nu = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^\mu \right)^2 - \sum_{\mu} \left(\sum_t \sigma_t^\mu \right)^2 \right\}. \quad (3.20)$$

ゆえに有効ボルツマン因子 $\exp(-H_{\text{eff}})$ は Hubbard-Stratonovich 変換を用いることにより非常に簡単になり

$$\exp(-H_{\text{eff}}) = \int Dz_1 \prod_{\mu} \left\{ \int Dz_2 \exp \left(B \sum_t \sigma_t^\mu \sigma_{t+1}^\mu + \frac{A}{M} \sum_t \sigma_t^\mu \right) \right\} \quad (3.21)$$

を得る．ここで

$$A = \sqrt{2\tilde{\chi} - \tilde{q}} z_2 + \sqrt{\tilde{q}} z_1 + \tilde{m} \quad (3.22)$$

と置いた．ここで Trotter 公式を逆に使えば Tr を簡単に計算することができて $M \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \exp \left(B \sum_t \sigma_t \sigma_{t+1} + \frac{A}{M} \sum_t \sigma_t \right) = \text{Tr} e^{A\sigma^z + \beta\Gamma\sigma^x} = 2 \cosh \sqrt{A^2 + \beta^2 \Gamma^2}. \quad (3.23)$$

を得る．全てのレプリカが自由エネルギーに同じ寄与を与えるため、極限 $n \rightarrow 0$ は簡単に取れて、結果は

$$-\beta f = \frac{1}{4} \beta^2 J^2 (\chi^p - q^p) + \frac{1}{2} \tilde{q} q - \tilde{\chi} \chi + \beta j_0 m^p - \tilde{m} m + \int Dz_1 \log \int Dz_2 (2 \cosh \omega) \quad (3.24)$$

となる．ここで

$$\omega = (A^2 + \beta^2 \Gamma^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

と置いた．自由エネルギーの鞍点条件をとると状態方程式

$$\tilde{m} = \beta j_0 p m^{p-1}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{4} \beta^2 J^2 p \chi^{p-1}, \quad (3.27)$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{2} \beta^2 J^2 p q^{p-1}, \quad (3.28)$$

$$m = \int Dz_1 Y^{-1} \int Dz_2 A \omega^{-1} \sinh \omega, \quad (3.29)$$

$$\chi = \int Dz_1 Y^{-1} \left(\int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega + \beta^2 \Gamma^2 \int Dz_2 \omega^{-3} \sinh \omega \right), \quad (3.30)$$

$$q = \int Dz_1 Y^{-2} \left(\int Dz_2 A \omega^{-1} \sinh \omega \right)^2 \quad (3.31)$$

を得る．簡単のため

$$Y = \int Dz_2 \cosh \omega \quad (3.32)$$

と置いた．この表式で $\Gamma = 0$ と置くと、 χ が 1 になり自由エネルギーが古典的な結果 [23, 30, 31] に戻ることが分かる．方程式 (3.26)-(3.31) は Goldschmidt の結果 [24] を有限の強磁性バイアス j_0 が有る場合に一般化したものとなっている．

あとは状態方程式 (3.26)-(3.31) を解けばよい．この際次の不等式が有用となる [32]．

$$\begin{aligned} \chi &= \int Dz_1 Y^{-1} \left(\int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega + \beta^2 \Gamma^2 \int Dz_2 \omega^{-3} \sinh \omega \right) \\ &\geq \int Dz_1 Y^{-1} \int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega \geq \int Dz_1 Y^{-1} \int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \sinh \omega \\ &\geq \int Dz_1 Y^{-2} \left(\int Dz_2 A \omega^{-1} \sinh \omega \right)^2 = q. \end{aligned} \quad (3.33)$$

最後の不等式はシュワルツの不等式

$$\begin{aligned} \int Dz_2 \cosh \omega \int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \sinh \omega &\geq \int Dz_2 1^2 \sinh \omega \int Dz_2 (A \omega^{-1})^2 \sinh \omega \\ &\geq \left(\int Dz_2 A \omega^{-1} \sinh \omega \right)^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

を用いた．式 (3.26)-(3.28) と条件 $0 \leq \chi, q, m \leq 1$ から、共役変数は極限 $p \rightarrow \infty$ で 0 または ∞ である．これから可能な解の組み合わせは

$$(\tilde{m}, \tilde{\chi}, \tilde{q}) = (0, 0, 0), (0, \infty, 0), (0, \infty, \infty), (\infty, 0, 0), (\infty, \infty, 0), (\infty, \infty, \infty) \quad (3.35)$$

の 6 つである．このうち解 $(\tilde{m}, \tilde{\chi}, \tilde{q}) = (\infty, 0, 0)$ は不適であることが次のようにして分かる．これらの値を式 (3.29)-(3.31) に代入すると、解として $(m, \chi, q) = (1, 1, 1)$ を得るが、これは条件 $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) = (0, 0)$ に反している（なぜなら $(\chi, q) = (1, 1)$ のとき $\tilde{\chi}, \tilde{q} \propto p(1)^{p-1} \rightarrow \infty$ であるから）ので除外されなければならない．同様にして $(\tilde{m}, \tilde{\chi}, \tilde{q}) = (\infty, \infty, 0)$ も解ではない．以上から最終的な解として

$$(m, \chi, q) = (0, \frac{1}{\beta \Gamma} \tanh \beta \Gamma, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) \quad (3.36)$$

の4つを得る.

解 $(m, \chi, q) = (0, 1, 0)$ は、常磁性解であり、量子揺らぎがない場合と同一である. この相では量子効果が実効的に有意でなく、そのためこの相は CP 相である. 解 $(m, \chi, q) = (0, \frac{1}{\beta\Gamma} \tanh \beta\Gamma, 0)$ は、量子揺らぎのために現れた新しい常磁性相で、 χ が横磁場 Γ のために 1 より小さくなっており、これが QP 相である. また $(m, \chi, q) = (0, 1, 1)$ は SG 相のものである. 極限 $p \rightarrow \infty$ では、有限の q の値は、式 (3.26)-(3.28) から $q = 1$ に限られる. また不等式 $\chi \geq q$ より χ も 1 となり、ゆえにこの相では量子効果が有意でないと期待できる [26, 33]. 最後に $(m, \chi, q) = (1, 1, 1)$ は強磁性解である. この相では全ての秩序変数が $p \rightarrow \infty$ の極限で 1 をとることになる. ゆえに量子揺らぎはこの相でも有意でないと期待できる. 以上の結果を、表 1 にまとめておく. これらの解を自由

Phase	(m, χ, q)	$(\tilde{m}, \tilde{\chi}, \tilde{q})$
CP	$(0, 1, 0)$	$(0, \infty, 0)$
QP	$(0, \tanh \beta\Gamma / (\beta\Gamma), 0)$	$(0, 0, 0)$
F	$(1, 1, 1)$	(∞, ∞, ∞)
SG	$(0, 1, 1)$	$(0, \infty, \infty)$

表 1: 各相における秩序変数の値

エネルギー (3.24) に代入すると、それぞれの相の自由エネルギーの値を

$$f_{\text{QP}} = -T \log 2 - T \log \cosh \beta\Gamma, \quad (3.37)$$

$$f_{\text{CP}} = -\frac{1}{4}\beta J^2 - T \log 2, \quad (3.38)$$

$$f_{\text{F}} = -j_0, \quad (3.39)$$

$$f_{\text{SG}} = -T \sqrt{\frac{2\tilde{q}}{\pi}} \rightarrow -\infty \quad (p \rightarrow \infty) \quad (3.40)$$

のように得る. このうち SG 相のものは非物理的な結果になっておりこれは古典の場合と同じで RS 仮定のためと考えられる. 正しい SG 解を得るためには、RSB を考慮しなければならず、次の節でその具体的な計算を行う.

3.4 RSB 解と相図

前章で見たように、古典的な REM の場合、SG 解は 1RSB によって正しく導出された. ここではそれに習い、高次の RSB は考慮せず、1 ステップのみに限定して計算を行うこととする. 新しい秩序変数と、レプリカ行列をブロックにわけると変数 m_1 とを導入し

$$q^{l\alpha_l, l'\beta_{l'}} = q_0, \quad q^{l\alpha_l, l'\beta_{l'}} = q_1 \quad l \neq l' \quad (3.41)$$

のように置く. ここで $l = 1, \dots, n/m_1$ はブロックの番号であり、 $\alpha_l = 1, \dots, m_1$ は l 番目のなかのレプリカの番号である. SA の下で、式 (3.16) は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \beta f = & \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{1}{2} \beta^2 J^2 q_0^p - \tilde{q}_0 q_0 \right) - \frac{1}{2} (m_1 - 1) \left(\frac{1}{2} \beta^2 J^2 q_1^p - \tilde{q}_1 q_1 \right) - \left(\frac{1}{4} \beta^2 J^2 \chi^p - \tilde{\chi} \chi \right) \\ & - (\beta j_0 m^p - \tilde{m} m) - \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \text{Tr} \exp(-H_{\text{eff}}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

さらに、有効ハミルトニアン H_{eff} は

$$\begin{aligned}
 -H_{\text{eff}} = & B \sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu} \sigma_{t+1}^{\mu} + \tilde{m} \sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu} + \tilde{\chi} \sum_{\mu} \sum_{t \neq t'} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\mu} \\
 & + \frac{1}{2} \left(\tilde{q}_0 \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{t, t'} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\nu} + (\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0) \sum_l \sum_{\mu_l \neq \nu_l} \sum_{t, t'} \sigma_t^{\mu_l} \sigma_{t'}^{\nu_l} \right) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

となる。スピンの積に関する和を

$$\begin{aligned}
 -H_{\text{eff}} = & \frac{1}{2} \tilde{q}_0 \left(\sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu} \right)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0) \sum_l \left\{ \left(\sum_{\mu_l} \sum_t \sigma_t^{\mu_l} \right)^2 - \sum_{\mu_l} \left(\sum_t \sigma_t^{\mu_l} \right)^2 \right\} \\
 & + \left(\tilde{\chi} - \frac{1}{2} \tilde{q}_0 \right) \sum_{\mu} \left(\sum_t \sigma_t^{\mu} \right)^2 + B \sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu} \sigma_{t+1}^{\mu} + \tilde{m} \sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu} \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

のように変形し、Hubbard-Stratonovich 変換を行えば

$$e^{-H_{\text{eff}}} = \int D z_1 \prod_l \left\{ \int D z_2 \prod_{\mu_l} \left(\int D z_3 \exp \left\{ \frac{A_1}{M} \sum_t \sigma_t^{\mu_l} + B \sum_t \sigma_t^{\mu_l} \sigma_{t+1}^{\mu_l} \right\} \right) \right\} \quad (3.45)$$

を得る。ここで

$$A_1 = \sqrt{\tilde{q}_0} z_1 + \sqrt{\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0} z_2 + \sqrt{2\tilde{\chi} - \tilde{q}_1} z_3 + \tilde{m} \quad (3.46)$$

と置いた。式 (3.23) でやったように、 $M \rightarrow \infty$ でスピンに関する和はトロッター公式により簡単に取りれる。さらに極限 $n \rightarrow 0$ をとれば、次の式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \text{Tr} \exp(-H_{\text{eff}}) = \frac{1}{m_1} \int D z_1 \log \int D z_2 \left(\int D z_3 2 \cosh \omega_1 \right)^{m_1} \quad (3.47)$$

を得る。ここで

$$\omega_1 = (A_1^2 + \beta^2 \Gamma^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

と置いた。2つのスピングラス秩序変数を等置 ($q_0 = q_1$) すると、RS 解 (3.24) が再度得られる。1RSB 解の自由エネルギーの鞍点条件は次のように与えられる。

$$\tilde{m} = \beta j_0 p m^{p-1}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{4} \beta^2 J^2 p \chi^{p-1}, \quad (3.50)$$

$$\tilde{q}_0 = \frac{1}{2} \beta^2 J^2 p q_0^{p-1}, \quad (3.51)$$

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{2} \beta^2 J^2 p q_1^{p-1}, \quad (3.52)$$

$$m = \int D z_1 Y_1^{-1} \int D z_2 Y_2^{m_1-1}, \int D z_3 A_1 \omega_1^{-1} \sinh \omega_1, \quad (3.53)$$

$$\chi = \int D z_1 Y_1^{-1} \int D z_2 Y_2^{m_1-1} \left(\int D z_3 A_1^2 \omega_1^{-2} \cosh \omega_1 + \beta^2 \Gamma^2 \int D z_3 \omega_1^{-3} \sinh \omega_1 \right), \quad (3.54)$$

$$q_0 = \int D z_1 \left(Y_1^{-1} \int D z_2 Y_2^{m_1-1} \int D z_3 A_1 \omega_1^{-1} \sinh \omega_1 \right)^2, \quad (3.55)$$

$$q_1 = \int D z_1 Y_1^{-1} \int D z_2 Y_2^{m_1-2} \left(\int D z_3 A_1 \omega_1^{-1} \sinh \omega_1 \right)^2. \quad (3.56)$$

簡単のため

$$Y_1 = Y_1(z_1) \equiv \int Dz_2 \left(\int Dz_3 \cosh \omega_1 \right)^{m_1}, \quad Y_2 = Y_2(z_1, z_2) \equiv \int Dz_3 \cosh \omega_1 \quad (3.57)$$

という記法を用いた。不等式 $\chi \geq q_1 \geq q_0$ が式 (3.33) とほぼ同様の方法で得られるが、計算の詳細はここでは省略する。

極限 $p \rightarrow \infty$ において、状態方程式 (3.49)-(3.56) と不等式 $\chi \geq q_1 \geq q_0$ から 1RSB の自明でない解は $(m, \chi, q_0, q_1) = (0, 1, 0, 1)$ の 1 つに決まる。対応する自由エネルギーは

$$f = -\frac{1}{4}\beta J^2 m_1 - T \frac{1}{m_1} \log 2 \quad (3.58)$$

で、 m_1 に関して微分して SG 相の自由エネルギー

$$f_{\text{SG}} = -J\sqrt{\log 2} \quad (3.59)$$

を得る。明らかにこれは古典の場合の SG 相と同じである。

全ての相の自由エネルギーが求まったので、相図を求めることができる。相境界は異なる 2 相の間の自由エネルギーを等置することによって得られ、その結果が図 2-5 である。横磁場 Γ が大きくなると、量子揺らぎが強磁性秩序を抑制し、QP 相への相転移を起こすことが図 3 から見て取れる。秩序変数は全ての相境界で不連続に変化するが、SG 相から CP 相、F 相への相転移はエントロピーの飛びを伴わず、熱力学的な意味では 2 次相転移である。他の転移は全て 1 次である。

4 静的近似の妥当性の検証

この章では、前章で用いた近似である SA の妥当性を検証する。その目的のために、まず最初、秩序変数の p が有限であるときの補正項を SA 下で計算する。その後、同様の方法で秩序変数が虚時間 t, t' に依存するばあいでの有限の p の補正項を計算する。最後に自由エネルギーをこれら補正項について展開し、 $p \rightarrow \infty$ の極限で、時間依存性が有意でなくなることを示す。

具体的な議論に入る前に、以下の結果の多くが先行研究によるものであることを注意しておく [26, 33]。我々独自の成果は以下の議論のうち強磁性相に関するものに限られる。

4.1 Large- p 展開

RS と SA の仮定のもとで自由エネルギーは

$$-\beta f = \frac{1}{4}\beta^2 J^2 (\chi^p - q^p) + \frac{1}{2}\tilde{q}q - \tilde{\chi}\chi + \beta j_0 m^p - \tilde{m}m + \int Dz_1 \log \int Dz_2 (2 \cosh \omega)$$

で与えられた (式 (3.24) を参照)。十分大きい有限の p を考えたとき、秩序変数は $p = \infty$ の解に非常に近いと考えられる。つまり、共役変数 $\tilde{\chi}, \tilde{q}, \tilde{m}$ は非常に大きい还是非常小さいかのどちらかであり、このことが系統的な自由エネルギーの計算を可能にしてくれるのである。

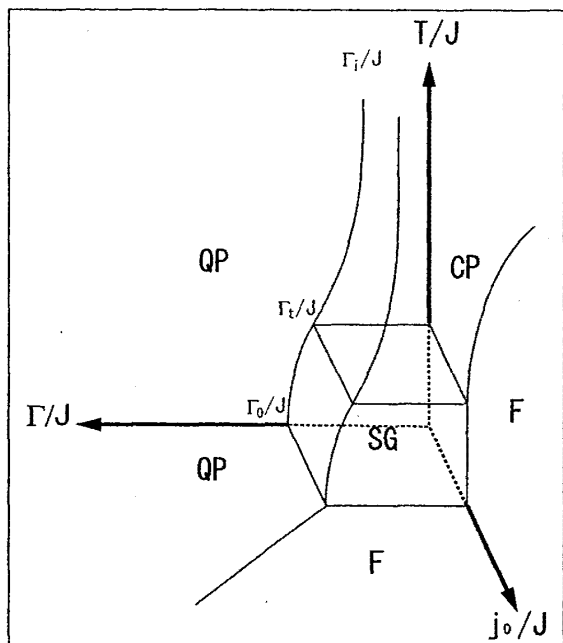


図 2: 横磁場 REM の全領域の相図の概略図. QP 相は Γ/J が $\Gamma_i/J = 1/\sqrt{2}$ より大きい領域に存在する. CP 相は $\Gamma/J \geq \Gamma_t/J = \log(2+\sqrt{3})/(2\sqrt{2})$ の領域では、量子揺らぎに完全に抑制されて消失する

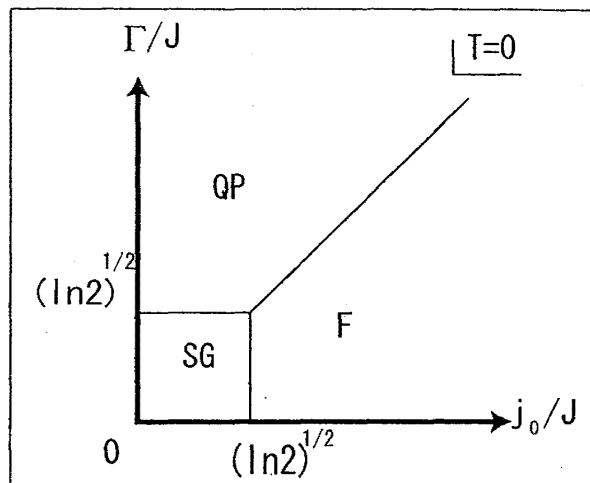


図 3: 基底状態 $T=0$ 平面での相図. 横磁場 Γ が大きくなると、量子揺らぎによって強磁性秩序が破壊され QP 相へと移行する

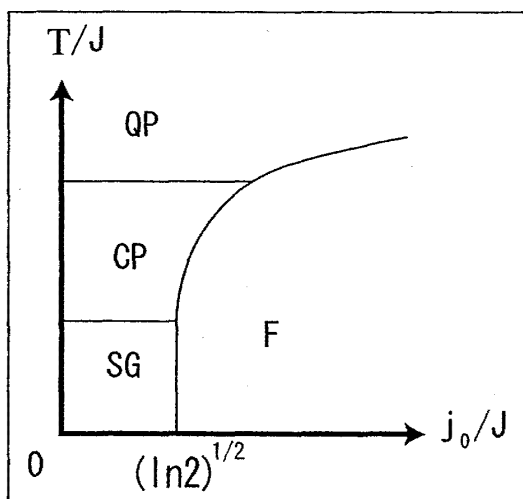


図 4: $\Gamma_i \leq \Gamma \leq \Gamma_t$ の範囲における、 T - j_0 平面の概略図. 温度 T が高いと、CP 相が QP 相に取って代わられる. Γ が大きくなると CP 相の存在する領域は狭まっていき、 $\Gamma = \Gamma_t$ で消失する.

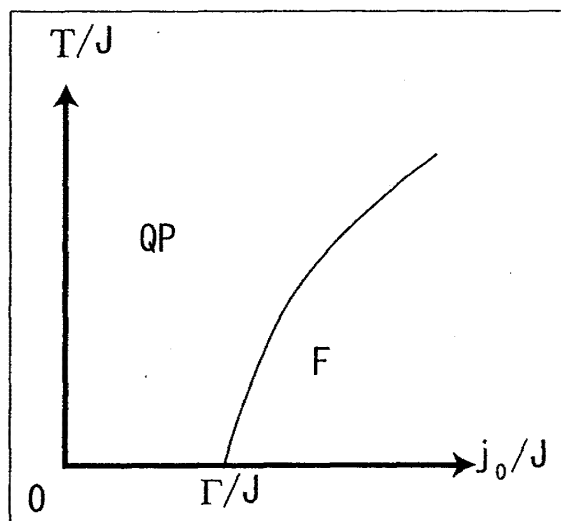


図 5: 非常に大きい Γ に対する T - j_0 平面の相図. SG 相は $\Gamma/J = \Gamma_0/j = \sqrt{\log 2}$ 以上では量子揺らぎのために現れない.

CP 相の場合、 $\tilde{\chi} \propto p$ は非常に大きく、他の変数は 0 と考えられる。 p が大きいとして鞍点法を用いれば、式 (3.24) における z_2 積分を評価することができる。そのために積分の中身を顕に書くと、

$$\begin{aligned} & \int D z_2 (2 \cosh \omega) \\ &= \int \frac{d z_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} z_2^2 + \sqrt{2\tilde{\chi} z_2^2 + (\beta\Gamma)^2} \right) + \exp \left(-\frac{1}{2} z_2^2 - \sqrt{2\tilde{\chi} z_2^2 + (\beta\Gamma)^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

である。このうち第 2 項は第 1 項と比較して無視できるほど小さい。第 1 項の鞍点は

$$z_2 = \pm \sqrt{\frac{4\tilde{\chi}^2 - (\beta\Gamma)^2}{2\tilde{\chi}}} \quad (4.2)$$

で与えられ、ゆえに式 (4.1) の鞍点での値は

$$\int \frac{d z_2}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z_2^2 + \sqrt{2\tilde{\chi} z_2^2 + (\beta\Gamma)^2} \right) \approx 2 \exp \left(\tilde{\chi} - \frac{(\beta\Gamma)^2}{4\tilde{\chi}} \right) \quad (4.3)$$

となる。このとき自由エネルギーは

$$\beta f = -\frac{1}{4}(\beta J)^2 \chi^p + \tilde{\chi} \chi - \log 2 - \tilde{\chi} + \frac{(\beta\Gamma)^2}{4\tilde{\chi}} \quad (4.4)$$

と評価される。 $\tilde{\chi}$ に関して変分をとれば、秩序変数 χ の値が得られ

$$\chi_{CP} = 1 - \frac{1}{4}(\beta\Gamma)^2 \tilde{\chi}^{-2} = 1 - \frac{1}{4}(\beta\Gamma)^2 \left(\frac{1}{4}(\beta J)^2 p \chi^{p-1} \right)^{-2} \approx 1 - 4 \frac{(\Gamma/J)^2}{(\beta J)^2} \frac{1}{p^2} \quad (4.5)$$

となる。これを自由エネルギーに代入すれば最終的な値として

$$\beta f_{CP} = -\frac{1}{4}(\beta J)^2 - \log 2 - \frac{1}{p}(\Gamma/J)^2 + O(p^{-2}) \quad (4.6)$$

を得る。

次に QP 相について考える。この相では、 $\tilde{\chi}$ が非常に小さくまた他の変数は 0 である。そこで状態方程式 (3.30) で z_1 積分が利かずに

$$\chi = Y^{-1} \left(\int D z_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega + \beta^2 \Gamma^2 \int D z_2 \omega^{-3} \sinh \omega \right) \quad (4.7)$$

となる。ここで ω の定義から、 $\tilde{\chi}$ に関する微分は以下のように計算できる。

$$\frac{d\omega}{d\tilde{\chi}} = A \omega^{-1} \frac{dA}{d\tilde{\chi}} = A \omega^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\chi}}} z_2 = \omega^{-1} z_2^2. \quad (4.8)$$

式 (3.30) 中の積分は、 $\tilde{\chi}$ が小さいとして展開すればそれぞれ次のように評価される。

$$\int D z_2 \cosh \omega \approx \cosh \beta\Gamma + \frac{\tilde{\chi}}{\beta\Gamma} \sinh \beta\Gamma, \quad (4.9)$$

$$\int D z_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega \approx \frac{2\tilde{\chi}}{\beta\Gamma} \cosh \beta\Gamma, \quad (4.10)$$

$$\int D z_2 \omega^{-3} \sinh \omega = \frac{2\tilde{\chi}}{(\beta\Gamma)^2} \left(-3 \frac{\sinh \beta\Gamma}{\beta\Gamma} + \frac{\cosh \beta\Gamma}{(\beta\Gamma)^2} \right) + \frac{1}{(\beta\Gamma)^2} \frac{\sinh \beta\Gamma}{\beta\Gamma}. \quad (4.11)$$

以上の値を式 (3.30) に代入すれば、秩序変数の値は

$$\chi_{QP} = \frac{\tanh \beta\Gamma}{\beta\Gamma} + \frac{1}{4} \frac{J^2}{\Gamma^2} (3 - 3\beta\Gamma \tanh \beta\Gamma + \tanh^2 \beta\Gamma) p \exp \left(-(p-1) \log \frac{\beta\Gamma}{\tanh \beta\Gamma} \right) \quad (4.12)$$

となる。これを自由エネルギーに代入すれば、

$$\beta f_{QP} = -\log \cosh \beta\Gamma - \log 2 - \frac{1}{4} \beta^2 J^2 \exp \{ -p \log (\beta\Gamma / \tanh \beta\Gamma) \} \quad (4.13)$$

を得る。ここで注意すべきは、 p に関する補正が p に関して指数関数的に小さいということであり、これは後の時間依存の計算結果と著しく矛盾する。

強磁性相では、 p が十分大きい範囲では、条件 $2\tilde{\chi} = \tilde{q}$ が有限の p でも成り立っているとするのが、妥当な仮定であると考えられる（この仮定は後で検証する）。式 (3.30) はこのとき

$$\chi = \int Dz_1 \left(A^2 \omega^{-2} + \beta^2 \Gamma^2 \omega^{-3} \frac{\sinh \omega}{\cosh \omega} \right) \quad (4.14)$$

となる。式 (4.14) の右辺第 1 項は次のようにも書ける。

$$\int Dz_1 A^2 \omega^{-2} = \int Dz_1 \frac{\left(1 + \sqrt{\tilde{q} z_1 / \tilde{m}} \right)^2}{1 + 2\sqrt{\tilde{q} z_1 / \tilde{m}} + \left(\sqrt{\tilde{q} z_1 / \tilde{m}} \right)^2 + (\beta\Gamma / \tilde{m})^2}. \quad (4.15)$$

p が十分大きいとき、 $1/\tilde{m} \propto 1/p$ は非常に小さいと考えられるので、式 (4.15) をこれで展開できる。単純な計算の後、主要な $1/p$ の補正項は、

$$\int Dz_1 A^2 \omega^{-2} \approx 1 - \frac{\beta^2 \Gamma^2}{\tilde{m}^2} = 1 - \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \frac{1}{p^2} m^{-2p+2} \quad (4.16)$$

で与えられることがわかる。同様に式 (4.14) の右辺第 2 項についても計算を行う。これを变形すると

$$\int Dz_1 \left(\beta^2 \Gamma^2 \omega^{-3} - 2\beta^2 \Gamma^2 \omega^{-3} \frac{e^{-2\omega}}{1 + e^{-2\omega}} \right) \quad (4.17)$$

となり、このうち $\exp(-2\omega)$ は p に関して指数関数的に小さい。上式 (4.17) の第 1 項は式 (4.16) と同様に、 $1/p$ の冪展開で評価することができて、結果は

$$\int Dz_1 \beta^2 \Gamma^2 \omega^{-3} \approx \frac{\Gamma^2}{\beta j_0^3} \frac{1}{p^3} m^{-3p+3} \quad (4.18)$$

となる。この項は $1/p^3$ に比例するので、式 (4.16) の補正項よりも小さい。また、他の変数 m および q についても同様の方法で評価することができる。条件 $2\tilde{\chi} = \tilde{q}$ のもとで式 (3.29) は、

$$\begin{aligned} m &= \int Dz_1 Y^{-1} \int Dz_2 A \omega^{-1} \sinh \omega = \int Dz_1 A \omega^{-1} \tanh \omega \\ &\approx \int Dz_1 A \omega^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \frac{1}{p^2} m^{-2p+2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \frac{1}{p^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

で与えられる. 最後の表現は m に関する反復代入によって得られた. さらに q については, 式 (3.31) を計算すればよく

$$\begin{aligned} q &= \int Dz_1 Y^{-2} \left(\int Dz_2 A\omega^{-1} \sinh \omega \right)^2 = \int Dz_1 (A\omega \tanh \omega)^2 \\ &\approx \int Dz_1 A^2 \omega^{-2} \approx 1 - \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \frac{1}{p^2} = \chi \end{aligned} \quad (4.20)$$

を得る. この式は最初に仮定した条件 $2\tilde{\chi} = \tilde{q}$ と自己無撞着である. 以上の結果を代入して主要な項を残せば自由エネルギーは

$$\begin{aligned} \beta f_F &\approx -\beta j_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \right\}^p + \beta j_0 p \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \right)^p - \int Dz_1 \log 2 \cosh \omega \\ &\approx -\beta j_0 + O(p^{-2}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

となり, $1/p$ に関しての 1 次の項は現れないことが分かった. 式 (4.21) の最後の行を導出する際, 積分 $\int Dz_1 \log 2 \cosh \omega$ は,

$$\begin{aligned} \int Dz_1 \log 2 \cosh \omega &\approx \int Dz_1 \omega \approx \tilde{m} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 m^{-2p+2} \\ &\approx \tilde{m} \approx \beta j_0 p \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{p-1}{p^2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \right\} = \beta j_0 p - \frac{\beta j_0}{2} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 + \frac{\beta j_0}{2} \frac{1}{p} \left(\frac{\Gamma}{j_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

のように評価した.

最後に SG 相に関しては, 1RSB の結果を用いなければならない. 計算はかなり長く込み入っている, これを省き結果だけ書くと

$$\chi \approx 1 - \frac{\Gamma^2}{p^2 J^2 \log 2} = q_1, \quad (4.23)$$

$$f_{SG} = -J \left(\sqrt{\log 2} - \frac{\Gamma^2}{2pJ^2 \sqrt{\log 2}} + O(p^{-2}) \right) \quad (4.24)$$

を得る. より詳細な議論については文献 [26, 33] を参考のこと.

4.2 時間依存 large- p 展開

4.2.1 時間依存状態方程式の導出

SA を改良するためには, 秩序変数の時間依存性を残したまま取り扱うことを考えなければならない. RS の仮定の下で, 各秩序変数を次のように書くことにする.

$$q_{t,t'}^{\mu\mu} = \chi(t, t'), \quad q_{t,t'}^{\mu\nu} = q(t, t'), \quad m_t^\mu = m(t). \quad (4.25)$$

ここで、各共役変数を時間依存部とそうでない部分に分けて考える。すると有効ハミルトニアンもそのように分けることができ、それを $H_{\text{eff}} = H_{\text{stat}} + V(t, t')$ のように書くと

$$H_{\text{stat}} = -B \sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu} \sigma_{t+1}^{\mu} - \frac{\tilde{\chi}}{M^2} \sum_{\mu} \sum_{t \neq t'} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\mu} - \frac{\tilde{q}}{2M^2} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{t, t'} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\nu} - \frac{\tilde{m}}{M} \sum_{\mu} \sum_t \sigma_t^{\mu}, \quad (4.26)$$

$$V(t, t') = -\frac{1}{M^2} \sum_{\mu} \sum_{t \neq t'} \Delta \tilde{\chi}(t, t') \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\mu} - \frac{1}{2M^2} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{t, t'} \Delta \tilde{q}(t, t') \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\nu} - \frac{1}{M} \sum_{\mu} \sum_t \Delta \tilde{m}(t) \sigma_t^{\mu} \quad (4.27)$$

となる。ここで共役変数は

$$\tilde{\chi}(t, t') = \tilde{\chi} + \Delta \tilde{\chi}(t, t'), \quad \tilde{q}(t, t') = \tilde{q} + \Delta \tilde{q}(t, t'), \quad \tilde{m}(t) = \tilde{m} + \Delta \tilde{m}(t) \quad (4.28)$$

とする。時間依存部の分割の任意性を残さないためには $\tilde{\chi}$ を、 $\tilde{\chi}(t, t')$ の時間に関する平均値とみなせばよい。他の変数についても同様である。ここで、各秩序変数はもともと式 (3.17a)-(3.17c) のようにスピンの相関関数で書かれていたことを思い出せば、それらは 1 より小さくしかも時間間隔 $|t - t'|$ に関する単調減少関数であると考えられる (但し、周期境界条件から $|t - t'|/2 \leq M$ の満たされる領域で)。ゆえに、鞍点では秩序変数の p 乗で表される共役変数の時間依存部は、 p が大きくなるにつれて速やかに減衰すると考えられ、自由エネルギーを時間依存部で展開することは、非常に良い近似を与えると期待される。

自由エネルギーを $V(t, t')$ に関して 1 次まで展開すると

$$\begin{aligned} \beta f = & \frac{1}{2} \frac{1}{M^2} \sum_{t, t'} \left(\frac{1}{2} \beta^2 J^2 q(t, t')^p - \tilde{q} q(t, t') - \Delta \tilde{q}(t, t') q(t, t') \right) \\ & - \frac{1}{M^2} \sum_{t \neq t'} \left(\frac{1}{4} \beta^2 J^2 \chi(t, t')^p - \tilde{\chi} \chi(t, t') - \Delta \tilde{\chi}(t, t') \chi(t, t') \right) \\ & - \frac{1}{M} \sum_t \{ (\beta j_0 m(t))^p - (\tilde{m} + \Delta \tilde{m}(t)) m(t) \} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\log \text{Tr} \exp(-H_{\text{stat}}) + \langle V \rangle_{\text{stat}}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

を得る。ここで $\langle \dots \rangle_{\text{stat}}$ は $\exp(-H_{\text{stat}})$ を重みとした平均を表す事とする。各秩序変数の状態方程式は、共役変数の時間依存部の汎関数微分によって得られ、結果は

$$m(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\langle \sum_{\mu} \sigma_t^{\mu} \right\rangle_{\text{stat}}, \quad (4.30a)$$

$$q(t, t') = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\langle \sum_{\mu \neq \nu} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\nu} \right\rangle_{\text{stat}}, \quad (4.30b)$$

$$\chi(t, t') = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\langle \sum_{\mu} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\mu} \right\rangle_{\text{stat}} \quad (4.30c)$$

である。先ほど新しく定義したハミルトニアン H_{stat} は、実は SA 下の有効ハミルトニアンと同一であるので、式 (3.21) でやったように Hubbard-Stratonovich 変換で簡略化できる。式 (3.21) 及

び(4.30a)-(4.30c) から、 q と m が時間に依存せず、 χ のみが時間依存することを示すことができる。なぜなら、ボルツマンファクター $\exp(-H_{\text{stat}})$ において、 Trotter 方向は時間 t の平行移動に関して不変で、かつ各レプリカが独立なので、 $\langle \sigma_t^\mu \rangle_{\text{stat}}$ は時間によらず、異なるレプリカ間のスピンの積の平均が、平均の積に分かれてしまうためである。従って、問題は一樣磁場中の一次元イジングモデルの2点相関関数を求める問題に帰着した。今の場合、相互作用 B がスピン数 M に依存しているために計算が少し込み入っているため、その詳細を Appendix A に記した。その結果を用いれば $\chi(\tau, \tau')$ は次のようになる。

$$\chi(\tau, \tau') = \int Dz_1 Y^{-1} \left(\int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega + \beta^2 \Gamma^2 \int Dz_2 \omega^{-2} \cosh \omega [1 - 2|\tau - \tau'|] \right). \quad (4.31)$$

ここで式(3.22)-(3.25)と同じ表記を使った。 $M \rightarrow \infty$ の極限では、時間は連続的となり0から1の範囲の値をとる変数 τ を

$$\tau \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{t}{M} \quad (4.32)$$

と定義することができる。式(4.31)を時間 τ 及び τ' に関して積分すれば SA での結果(3.30)が再現される。他の秩序変数の状態方程式は SA 下での方程式と同一である。不等式 $\chi(\tau, \tau') \geq q$ が任意の τ, τ' で成り立つことは、式(3.33)の導出から容易に分かる。

4.2.2 $\chi(\tau)$ の解

CP 相では、量子効果は有意でなく古典の場合と同様に $\chi(\tau)$ が極めて1に近いと考えられる。他の秩序変数 q と m は0であろう。ゆえに条件 $\tilde{q} = \tilde{m} = 0$ から、 z_1 に関する積分は利かず、式(4.31)は

$$\chi_{\text{CP}}(\tau, \tau') = Y^{-1} \left(\int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega + \beta^2 \Gamma^2 \int Dz_2 \omega^{-2} \cosh \omega (1 - 2|\tau - \tau'|) \right) \quad (4.33)$$

となる。 $\chi(\tau)$ が極めて1に近いので、 $\tilde{\chi}$ は p が大きいとき非常に大きいと考えられ、 z_2 積分は鞍点法によって評価できる。積分の分母にある因子 $Y \equiv \int Dz_2 \cosh \omega$ はすでに式(4.3)で求められているので、改めて計算する必要はない。また分子の $A^2 \omega^{-2} = 2\tilde{\chi} z_2^2 / (2\tilde{\chi} z_2^2 + \beta^2 \Gamma^2)$ の項は、 $0 < z_2 < \infty$ の範囲で値を大きく変えず、また $\tilde{\chi}$ の値とは無関係に単調減少するため鞍点へは寄与しないと考えられる。ゆえに $A^2 \omega^{-2} \cosh \omega$ の鞍点は SA 下の式(4.2)と同一であると近似できる。従って、式(4.33)の第1項は

$$\int Dz_2 A^2 \omega^{-2} \cosh \omega \approx \int Dz_2 \left(1 - \frac{\beta^2 \Gamma^2}{2\tilde{\chi} z_2^2} \right) \cosh \omega \approx \left(1 - \frac{\beta^2 \Gamma^2}{4\tilde{\chi}} \tilde{\chi}^{-2} \right) \exp \left(\tilde{\chi} - \frac{(\beta \Gamma)^2}{4\tilde{\chi}} \right)$$

のように計算される。式(4.33)の右辺第2項も同様にして

$$\int Dz_2 \omega^{-2} \cosh \omega (1 - 2|\tau - \tau'|) \approx \frac{1}{2\tilde{\chi}^2 (1 - 2\tau)^2} \exp \left(\tilde{\chi} (1 - 2|\tau - \tau'|) + \frac{(\beta \Gamma)^2}{4\tilde{\chi}} \right) \quad (4.34)$$

と求められる。この式の導出の際、鞍点は

$$z_2 = \pm \sqrt{\frac{4\tilde{\chi}(1 - 2|\tau - \tau'|)^2 - (\beta \Gamma)^2}{2\tilde{\chi}}} \quad (4.35)$$

と評価した. 以上から $\chi(\tau, \tau')$ の最終的な表式は

$$\begin{aligned}\chi_{CP}(\tau, \tau') &\approx 1 - \frac{\beta^2 \Gamma^2}{4} \tilde{\chi}^{-2} + \frac{\beta^2 \Gamma^2}{4 \tilde{\chi}^2 (1 - 2|\tau - \tau'|)^2} e^{-(1 - (1 - 2|\tau - \tau'|)^2) \tilde{\chi}} \\ &\approx 1 - 4 \frac{\Gamma^2/J^2}{(\beta J)^2} \frac{1}{p^2} + 4 \frac{\Gamma^2/J^2}{(\beta J)^2} \frac{1}{p^2 (1 - 2|\tau - \tau'|)^2} e^{-\frac{1}{4} \beta^2 J^2 (1 - (1 - 2|\tau - \tau'|)^2) p}\end{aligned}\quad (4.36)$$

である. これを見ると時間依存補正項は p が大きくなるにつれ指数関数的に小さくなることが分かる. この意味で, CP 相では有限の p に対しても, それが十分大きければ SA が正しいといえることができる.

QP 相では量子揺らぎが支配的であると考えられ, それは $\chi(\tau)$ が 1 より小さい相として特徴付けられると期待できる. ゆえに全ての共役変数の非時間依存項は $p \rightarrow \infty$ の極限で 0 となると考えられる. このとき式 (4.31) は次のように書ける.

$$\chi_{QP}(\tau, \tau') \rightarrow \frac{\cosh \beta \Gamma (1 - 2|\tau - \tau'|)}{\cosh \beta \Gamma} = \chi_0(\tau, \tau') \quad (p \rightarrow \infty). \quad (4.37)$$

ゆえにこの相では χ が, $p \rightarrow \infty$ の極限でも, 時間に依存していることが分かる. しかし自由エネルギーの中には, $\chi(\tau)$ は常に p の冪 χ^p の形で現れるため, 任意の τ で 1 より小さいこの解では, 全ての $\chi(\tau)$ に依存する項が $p \rightarrow \infty$ で消え, 自由エネルギーに影響は現れない. 有限の p の補正項を得るには, 自由エネルギーを V に関して次のオーダーまで展開する必要がある. その結果は

$$\begin{aligned}\log \text{Tr} \exp \left(B \sum_t \sigma_t \sigma_{t+1} + \frac{1}{M^2} \sum_{t \neq t'} \Delta \tilde{\chi}(t, t') \sigma_t \sigma_{t'} \right) \\ \approx \log \text{Tr} e^{H_0} + \left\langle \frac{1}{M^2} \sum_{t \neq t'} \Delta \tilde{\chi}(t, t') \sigma_t \sigma_{t'} \right\rangle_0 + \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{1}{M^2} \sum_{t \neq t'} \Delta \tilde{\chi}(t, t') \sigma_t \sigma_{t'} \right)^2 \right\rangle_0 \\ - \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{M^2} \sum_{t \neq t'} \Delta \tilde{\chi}(t, t') \sigma_t \sigma_{t'} \right\rangle_0^2\end{aligned}\quad (4.38)$$

ここで $H_0 = B \sum_t \sigma_t \sigma_{t+1}$ とし, $\langle \dots \rangle_0$ は重み e^{H_0} による平均を表すものとした. $\Delta \tilde{\chi}(t, t')$ に関する汎関数微分をとることにより, 状態方程式として

$$\begin{aligned}\chi(t, t') &= \langle \sigma_t \sigma_{t'} \rangle_0 + \left\langle \frac{1}{M^2} \sum_{t_1, t_2} \Delta \tilde{\chi}(t_1, t_2) \sigma_t \sigma_{t'} \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \right\rangle_0 - \left\langle \frac{1}{M^2} \sum_{t_1, t_2} \Delta \tilde{\chi}(t_1, t_2) \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \right\rangle_0 \langle \sigma_t \sigma_{t'} \rangle_0 \\ &\rightarrow \chi_0(\tau, \tau') + \int_0^1 \int_0^1 d\tau_1 d\tau_2 \left\{ \chi_0^{(4)}(\tau, \tau', \tau_1, \tau_2) - \chi_0(\tau_1, \tau_2) \chi_0(\tau, \tau') \right\} \Delta \tilde{\chi}(\tau_1, \tau_2) \\ &\approx \chi_0(\tau, \tau') + \frac{1}{4} (\beta J)^2 p \int_0^1 \int_0^1 d\tau_1 d\tau_2 \left\{ \chi_0^{(4)}(\tau, \tau', \tau_1, \tau_2) - \chi_0(\tau_1, \tau_2) \chi_0(\tau, \tau') \right\} \chi_0(\tau, \tau')^{p-1}\end{aligned}\quad (4.39)$$

を得る. ここで $\chi_0^{(4)}(\tau, \tau', \tau_1, \tau_2) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \sigma_t \sigma_{t'} \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \rangle_0$ は単一量子スピンの虚時間方向の 4 点相関関数である. これの具体的な計算は Appendix A に与えた. この式中の τ_1, τ_2 に関する積分は一般には非常に難しく込み入っているため, ここでは参考文献 [26] から, その結果だけを引用することにする.

$$\begin{aligned}\chi_{QP}(\tau, \tau') &= \chi_0(\tau, \tau') + \frac{1}{p} \frac{(\beta J)^2}{(2\beta \Gamma \tanh \beta \Gamma)^2} \\ &\times [1 - \chi_0(\tau, \tau') + 2\beta \Gamma \chi_0(\tau, \tau') \{ \tanh \beta \Gamma - (1 - 2|\tau - \tau'|) \tanh \beta \Gamma (1 - 2|\tau - \tau'|) \}].\end{aligned}\quad (4.40)$$

この結果から自由エネルギーの p の補正項が計算できて

$$\beta f_{QP} = -\log \cosh \beta \Gamma - \log 2 - \frac{1}{4p} \frac{\beta J}{\Gamma/J} (\tanh \beta \Gamma)^{-1} \quad (4.41)$$

となる. この結果を SA の結果 (4.13) と比較することは非常に有意義である. SA の場合、自由エネルギーの低温での振舞いは温度の冪則 $f - f(T=0) \propto -T^{p-1}$ に従う. この解は、低温極限で、自由エネルギーの温度に関する任意の回数の微分が全て 0 になることを要求する熱力学第 3 法則に反している³. 一方、時間依存性を取り入れた解析では自由エネルギーは指数則 $f - f(T=0) \propto -\exp(-2\beta\Gamma)/p$ を満たしており、これは熱力学の要請と一致している. さらにいえば、この二つの解では p が大きい極限での収束が質的に異なっている. SA の解が p に対して指数関数的に減衰するのに対して、時間依存解は冪則となっており、このことが自由エネルギーに対して $1/p$ の補正を与えることになっている.

F 相では、全ての共役変数が非常に大きいと考えられる. このときは、SA の場合と同様に $2\tilde{\chi} = \tilde{q}$ と仮定することが妥当と考えられる. このとき z_2 積分は利かずただ 1 を与えるので

$$\chi_F(\tau, \tau') = \int D z_1 \left(A^2 \omega^{-2} + \beta^2 \Gamma^2 \omega^{-2} \frac{\cosh \omega(1 - 2|\tau - \tau'|)}{\cosh \omega} \right) \quad (4.42)$$

となる. それぞれの共役変数は p に比例し非常に大きいので、 τ と τ' を固定したパラメータと見て、鞍点法によって評価することができる. 式 (4.42) から、右辺の第 1 項は SA の場合と同じ寄与を与えることがすぐに分かる. 第 2 項はを変形すると

$$\begin{aligned} \int D z_1 \omega^{-2} \frac{\cosh \omega(1 - 2|\tau - \tau'|)}{\cosh \omega} &= \int D z_1 \omega^{-2} \frac{e^{-2|\tau - \tau'|\omega} + e^{-\omega(2 - 2|\tau - \tau'|)}}{1 + e^{-2\omega}} \\ &\approx \int D z_1 \omega^{-2} \left(e^{-2|\tau - \tau'|\omega} + e^{-\omega(2 - 2|\tau - \tau'|)} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

を得る. 項 $\omega^{-2} \exp(-2|\tau - \tau'|\omega)$ 鞍点条件を書き下すと

$$z_1^2 = 4|\tau - \tau'|^2 \tilde{q} \left(1 - \frac{\beta^2 \Gamma^2}{\omega^2} \right) \quad (4.44)$$

である. この方程式を厳密に解くのは難しいが、非常に大きい p に対しては、式 (4.44) の右辺第 2 項が無視できるくらい小さく、ゆえに鞍点は $z_i = \pm 2|\tau - \tau'| \sqrt{\tilde{q}}$ のように評価できる. このうち符号が + の鞍点からの寄与は

$$\begin{aligned} &\left\{ (2|\tau - \tau'| \tilde{q} + \tilde{m})^2 + \beta^2 \Gamma^2 \right\}^{-1} \exp \left(-2|\tau - \tau'|^2 \tilde{q} - 2|\tau - \tau'| \sqrt{(2|\tau - \tau'| \tilde{q} + \tilde{m})^2 + \beta^2 \Gamma^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{\beta^2 j_0^2} \frac{1}{p^2} \exp \left\{ - \left(|\tau - \tau'|^2 J^2 \beta^2 + 2|\tau - \tau'| \sqrt{(|\tau - \tau'|^2 J^2 \beta^2 + \beta j_0) + \frac{\beta^2 \Gamma^2}{p^2}} \right) p \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

と評価できる. もう一方の鞍点 $z = -2|\tau - \tau'| \sqrt{\tilde{q}}$ も似たような寄与を与える. $2|\tau - \tau'|$ を $2 - 2|\tau - \tau'|$ によって置き換えれば、項 $\omega^{-2} \exp(-\omega(2 - 2|\tau - \tau'|))$ の鞍点での値も求まることとなる. 以上か

³この文章は文献 [26] の引用である. 通常、熱力学第 3 法則というのはエントロピーが低温極限で 0 になることを要求するものであり、その場合 $p \geq 3$ ではこの法則を満たしているように見える. 全ての微分が 0 などという強い要請には普通ならないが、今の場合はそうなるべき根拠がある. これについて Appendix B で考察する.

ら F 相では、有限の p による補正が CP 相の場合と同様に p に関して指数関数的に小さいことがわかる。

$$\chi_F(\tau, \tau') \approx 1 - \left(\frac{\Gamma}{j_0}\right)^2 \frac{1}{p^2} + \left(\frac{\Gamma}{j_0}\right)^2 \frac{1}{p^2} f(\tau, \tau', p). \quad (4.46)$$

ここで関数 $f(\tau, \tau', p)$ は時間依存補正部であり、 p が大きくなると指数関数的に減衰する。ゆえに式 (4.46) の第 3 項は無視できるほど小さく、主要な p の補正は SA と同じになることがわかる。当然、自由エネルギーも式 (3.39) ままであり、この近似では p が有限であることの補正は現れてこない。

SG 相では、1RSB を仮定する必要がある。 $\chi(\tau, \tau')$ を計算するためには、式 (4.27) 及び (4.29) 中で SG 秩序変数 q を q_0 と q_1 に置き換えなければならない。 $\Delta\tilde{\chi}(t, t')$ に関する微分を取れば

$$\chi_{SG}(t, t') = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{\mu} \frac{1}{Z} \text{Tr} \sigma_t^{\mu} \sigma_{t'}^{\mu} \exp(-H_{\text{stat}, 1\text{RSB}}) \quad (4.47)$$

を得る。RS の場合と同じように $H_{\text{stat}, 1\text{RSB}}$ は SA 下の 1RSB ハミルトニアンと等しい (式 (3.43)-(3.45) を見よ)。ゆえに $\chi(\tau, \tau')$ の具体的な解は再び次元イジングスピンの相関関数によって得られ

$$\begin{aligned} \chi_{SG}(\tau, \tau') &= \int Dz_1 Y_1^{-1} \int Dz_2 Y_2^{m_1-1} \\ &\left(\int Dz_3 A_1^2 \omega_1^{-2} \cosh \omega_1 + \int Dz_3 \beta^2 \Gamma^2 \omega_1^{-2} \cosh \omega_1 (1 - 2|\tau - \tau'|) \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる。ここで式 (3.46) 及び (3.57) と同じ記法を用いた。RS の場合と同じ理由で q_0, q_1 および m は時間に依存せず、その方程式は SA での解 (3.53), (3.55), (3.56) で与えられる。不等式 $\chi \geq q_1 \geq q_0$ が任意の τ で成り立つことは、シュワルツの不等式を用いれば今までと同様に簡単に証明できる。状態方程式から、RSB 解が RS と異なる解は、極限 $p \rightarrow \infty$ で $(m, \chi, q_0, q_1) = (0, 1, 0, 1)$ しかありえず、これは SA での解と同一である。ゆえに SG 相でもまた SA が正しい解を与えることが分かる。

有限の p での時間依存補正部を得るためには、式 (4.48) の第 2 項を計算しなければならない。しかし、その結果は直感的に分かりやすい簡明な形をしていないため、ここではその補正が CP、F 相と同様に p が大きくなるにつれて指数関数的に減衰する解であることを指摘するにとどめる。その意味で CP、F 相と同様に SG 相でも十分大きい p なら SA が近似的に正しいということが出来る。SG 相における詳細な計算は文献 [33] を参考のこと。

以上の議論をまとめると、CP、F 及び SG 相では、秩序変数の時間依存部が p が大きい領域では指数関数的に小さく、SA が有限の p に対しても近似的に正しいということが分かった。一方、QP 相では、SA による結果と時間依存性を取り入れた解析との間に著しい違いが有ることが明らかにされた。秩序変数 $\chi(\tau, \tau')$ は強く時間に依存し、SA による自由エネルギーの振る舞いが、熱力学法則に反することが示された。これらの事実から、SA は量子効果の弱い領域では効果を発揮するが、そうでないところでは破綻するということが明確となり、直感とも一致する結果となった。これらの不都合にもかかわらず、 $p \rightarrow \infty$ の極限では全ての相の自由エネルギーが SA の結果と一致することもわかった。その意味で、SA は REM に対しては厳密であるといえる。

5 総括

本論文では、横磁場中の REM をレプリカ法を用いて解析した。トロッター分解によって量子系を古典系に落とし、状態方程式を解く際には SA が仮定された。それらの解は $p \rightarrow \infty$ の極限では解析的に得ることができ、結果として量子揺らぎが強磁性秩序を破壊し、常磁性相への相転移を起こすことが示された。これらは現実の系に対しても起こりうる、もっともらしい性質と考えられる。

また、large- p 展開を用いることにより SA の妥当性を検証した。秩序変数の有限の p の補正項を計算することにより、CP、F 及び SG 相において時間依存補正項が、 p が大きくなるにつれ急激に小さくなることを示した。その意味で、有限の、しかし十分大きい p に対しても、SA がこれらの相で正しいことが分かった。一方、量子揺らぎの影響が非常に大きい QP 相では、秩序変数が実際に時間に依存するだけでなく、有限の p に対する SA による解は、熱力学法則に反することが明らかとなった。横磁場 Γ の強い極限では、各トロッタースライスが独立にそのスピン配位をとれるようになり、物理量はスライスに依存するようになると考えられ、この描像は SA の破綻と一致している。有限の p でのこのような困難にもかかわらず、 $p \rightarrow \infty$ の極限では、全ての相の自由エネルギーが SA のもとでの結果と一致した。このことは、 $p \rightarrow \infty$ の極限ではスピン配位が凍結し、各スライスごとの配位の差が有意でなくなるためと解釈できる。結果として、REM では SA が正しくなり、相図 (2)-(5) が厳密になると考えられる。

また、我々の計算から REM には RS な SG 相は存在しないことが明らかとなった。もちろん、このモデルは SK モデルとは異なるが、REM は取り扱いやすい理想化されたモデルであり、相空間の構造は古典の場合でも SK モデルより単純であった。これらの事実から、過去に報告された RS な SG 相は、なんらかの近似によって存在してしまった副産物であり、そのようなものは横磁場 SK モデルには存在しないと推測できる。

言うまでもなく、REM は現実のスピングラスを忠実に再現したモデルではない。また、これまでの議論から分かるように、SA はより現実的なモデルでは誤った結果を与える可能性がある。量子揺らぎの強い領域の解析は非常に難しく、SA は大きく破綻してしまう。そういった領域への有効なアプローチを見つけること、あるいは SA を改良することは未解決の問題であり、今後の興味ある課題の一つである。そのような試みに対して、我々の結果は SA が厳密になる事例として意義を持つはずである。

A 相関関数の計算

ここでは相関関数の計算を行い、式 (4.31) の導出を行う。規格化因子をとりあえず省略した相関関数を書くと

$$G(t, t') = \text{Tr} \sigma_t \sigma_{t'} \exp \left(J \sum_{t=1}^M \sigma_t \sigma_{t+1} + h \sum_{t=1}^M \sigma_t \right). \quad (\text{A.1})$$

となる。このとき周期境界条件を仮定する。これは一様な次元イジングモデルであるので転送行列法を用いて計算することができる。その一般解は

$$G(t, t') = 4x_+^2 x_-^2 \left(\lambda_+^{t-t'} \lambda_-^{M-(t-t')} + \lambda_+^{M-(t-t')} \lambda_-^{t-t'} \right) + (2x_+^2 - 1)^2 \lambda_+^M + (2x_-^2 - 1)^2 \lambda_-^M \quad (\text{A.2})$$

で与えられる. ここで λ_{\pm} は転送行列の固有値であり x_{\pm} は対応する固有ベクトル $|\pm\rangle$ の第一成分である. それらの具体的な形は以下のようにかける.

$$\lambda_{\pm} = e^J \left(\cosh h \pm \sqrt{\cosh^2 h - 1 + e^{-4J}} \right), \quad (\text{A.3})$$

$$|\pm\rangle = D_{\pm} \begin{pmatrix} -e^{-J} \\ e^J \left(\sinh h \mp \sqrt{\sinh^2 h + e^{-4J}} \right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_{\pm} \\ y_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

定数 D_{\pm} は規格化因子である. 今の場合, 変数 $J = B = \log(\coth \beta\Gamma/M)^{1/2}$ と $h = A/M$ はスピン数 M に依っているので $M \rightarrow \infty$ を注意してとらねばならない. 表記を省略していた定数 $C = \{(1/2) \sinh 2\beta\Gamma/M\}^{1/2}$ を復活させれば, 有限の値を $M \rightarrow \infty$ の極限で得ることができる. その結果は

$$x_{\pm}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(\beta\Gamma)^2}{\omega^2 \mp A\omega}, \quad (C\lambda_{\pm})^M \rightarrow e^{\pm\omega} \quad (\text{A.5})$$

である. ここで ω はすでに式 (3.25) で与えられているものである. 以上から相関関数 $G(t, t')$ は

$$G(t, t') \rightarrow G(\tau, \tau') = 2A^2\omega^{-2} \cosh \omega + 2(\beta\Gamma)^2\omega^{-2} \cosh \omega (1 - 2|\tau - \tau'|) \quad (\text{A.6})$$

と計算される. 式 (A.6) を式 (4.30c) に代入し, 極限 $n \rightarrow 0$ をとれば最終的な結果として

$$\chi(\tau, \tau') = \int Dz_1 Y^{-1} \left(\int Dz_2 A^2\omega^{-2} \cosh \omega + \beta^2\Gamma^2 \int Dz_2 \omega^{-2} \cosh \omega (1 - 2|\tau - \tau'|) \right).$$

を得る.

4点相関関数 $\chi_0^{(4)}$ の場合も同様にして計算できる. 条件 $t_1 < t_2 < t < t'$ を仮定する. 簡単な計算から

$$\begin{aligned} Z_0 \times \chi_0^{(4)}(t_1, t_2, t, t') &= \text{Tr} \sigma_t \sigma_{t'} \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \exp \left(B \sum_{t=1}^M \sigma_t \sigma_{t+1} \right) C^M \\ &= C^M \left(\lambda_-^{M+t_1-t_2+t-t'} \lambda_+^{-(t_1-t_2+t-t')} + \lambda_+^{M+t_1-t_2+t-t'} \lambda_-^{-(t_1-t_2+t-t')} \right) \\ &\rightarrow 2 \cosh \beta\Gamma (1 + 2(\tau_1 - \tau_2 + \tau - \tau')) \quad (M \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

を得る. ここで $Z_0 = 2 \cosh \beta\Gamma$ はボルツマンファクター e^{-H_0} に対する分配関数である. 大小関係 $t_1 < t_2 < t < t'$ が変化した場合は式 (A.7) 中の変数もそれに応じた順番で並べなければならない.

B $T \rightarrow 0$ 極限における自由エネルギーの温度微係数について

一般に, 系が基底状態と励起状態の間にギャップを持ち, 連続的な対称性を持たないとき, 基底状態と第一励起状態の縮退度及びエネルギーをそれぞれ g_0, g_1 と E_0, E_1 と書けば, 低温での分配関数は

$$Z \approx g_0 e^{-\beta E_0} + g_1 e^{-\beta E_1} \quad (\text{B.1})$$

のように書ける. このとき自由エネルギーは

$$F = -T \log Z \approx E_0 - T \log g_0 - \frac{g_1}{g_0} T e^{-\beta \Delta E} \quad (\text{B.2})$$

となる。 $\Delta E = E_1 - E_0 > 0$ である。このうち最右辺の第2項は基底状態が系の大きさ N と共に指数関数的に縮退するような異常な事態でない限りは N のオーダーにはならないので無視してよい。結果として自由エネルギーの温度依存部は $T \exp(-\beta \Delta E)$ の形をしており、自由エネルギーの任意の階数の温度微分が $T \rightarrow 0$ 極限で0となることが分かる。実際、イジングスピン系や調和振動子系はこのようになっている。もちろん、連続的な対称性をもつ気体モデルやハイゼンベルグモデル、ギャップのない系はこの限りではない。本論文で扱った系は、離散的な対称性を持つイジング系であり、量子相転移境界を除けばエネルギーギャップが有ると考えられるので、以上の議論が通用するものと思われる⁴。

謝辞

本研究を指導し、度重なる議論と励ましを与えてくださった西森秀稔教授に心から感謝いたします。高橋和孝助手には、多くの研究に関する助言だけでなく、論文の推敲の際にも助力を頂きました。深く感謝いたします。また、本研究を様々な形で支えてくださった西森研究室、及び物性理論の皆様に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] L. Onsager: Phys. Rev. **65** (1944) 117.
- [2] V. Cannella and J. A. Mydosh: Phys. Rev. B **6** (1972) 4220.
- [3] M. A. Ruderman and C. Kittel: Phys. Rev. **96** (1954) 99.
- [4] K. Yoshida: Phys. Rev. **106** (1957) 893.
- [5] S. F. Edwards and P. W. Anderson: J. Phys. F **5** (1975) 965.
- [6] D. Sherrington and S. Kirkpatrick: Phys. Rev. Lett **35** (1975) 1792.
- [7] S. Kirkpatrick and D. Sherrington: Phys. Rev. B **17** (1977) 4384.
- [8] G. Parisi: J. Phys. A **73** (1980) L115. 4384.
- [9] G. Parisi: J. Phys. A **13** A (1980) 1101. 4384.
- [10] V. Dotsenko: *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems* (Cambridge University Press, New York, 2001) p.64.
- [11] F. Barahona: J. Phys. A **15** (1982) 3241.
- [12] A. P. Young: Computer Physics Communications **146** (2002) 107.
- [13] E. Marinari, G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi, J. Ruiz-Lorenzo, and F. Zuliani: J. Stat. Phys **98** (2000) 973.

⁴ただ、これは系の対称性に起因する性質であり熱力学法則がどうこうという問題ではないという気もする。その意味で本文中の記述は誤り (少なくとも misleading) といえるが、議論そのものは間違っていないと思われる。

- [14] D. S. Fisher and D. A. Huse: Phys. Rev. B **38** (1988) 386.
- [15] M. Palassini and A. P. Young: Phys. Rev. Lett **85** (2000) 3017.
- [16] S. Sachdev: *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, New York, 1999)
- [17] W. Wu, B. Ellman, T. F. Rosenbaum, G. Aeppli, and D.H. Reigh: Phys. Rev. Lett **67** (1991) 2076.
- [18] A. J. Bray and M. A. Moore: J. Phys. C **13** (1980) L665.
- [19] T. Yamamoto and H. Ishii: J. Phys. C **20** (1987) 6053.
- [20] D. Thirumalai, Q. Li and T. R. Kirkpatrick: J. Phys. A **22** (1989) 3339.
- [21] G. Büttner and K. D. Usadel: Phys. Rev. B **41** (1990) 428.
- [22] K. D. Usadel, G. Büttner, and T. K. Kopeć: Phys. Rev. B **44** (1991) 12583.
- [23] B. Derrida: Phys. Rev. B **24** (1981) 2613.
- [24] Y. Y. Goldschmidt: Phys. Rev. B **41** (1989) 4858.
- [25] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1454.
- [26] V. Dobrosavljevic and D. Thirumalai: J. Phys. A **23** (1990) L767.
- [27] H. Nishimori: *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction* (Oxford University Press, Oxford, 2001)
- [28] S. Kabashima: *ZITUEN REPURIKA HOU* (<http://www.sp.dis.titech.ac.jp/kaba/REM.pdf>) (in Japanese)
- [29] M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro: *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, Singapore, 1987)
- [30] D. J. Gross and M. Mézard: Nucl. Phys. **B240** (1984) 431.
- [31] N. Surlas: Nature **339** (1989) 693.
- [32] H. Nishimori and Y. Nonomura: J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 3780.
- [33] L. De Cesare, K. Lukierska-Walasek, I. Rabuffo and K. Walasek: J. Phys. A **29** (1996) 1605.